

FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

1. Introducere

Filtrele cu răspuns infinit la impuls (*RII*) se dovedesc în anumite aplicații mai avantajoase decât filtrele *RFI* (*filtre cu răspuns finit la impuls*) datorită faptului că pot realiza caracteristici de selectivitate excelente cu un ordin mult mai mic al funcției de transfer. Spre deosebire de filtrele *RFI*, filtrele *RII* nu pot avea caracteristica de fază liniară.

Imposibilitatea realizării unei faze liniare are implicații în ceea ce privește proiectarea filtrelor *RII*, în sensul că aceasta presupune fie aproximarea simultană atât a specificațiilor pentru caracteristica de amplitudine cât și a celor referitoare la fază, fie corecția ulterioară a distorsiunilor de fază în ipoteza că proiectarea s-a bazat numai pe aproximarea caracteristicii de amplitudine. Există un singur tip de filtru *RII* la care una din cele două caracteristici este constantă (filtrului trece tot - *FTT*).

Filtrul *RII* este descris în domeniul timp prin ecuația cu diferențe finite:

$$y[n] = \sum_{i=0}^M b_i x[n-i] - \sum_{i=1}^N a_i y[n-i]. \quad (1)$$

În această situație funcția de transfer devine:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad (2)$$

în care s-a presupus că $a_0 = 1$.

Proiectarea unui filtru digital *RII* constă în determinarea coeficienților a_i și b_i din expresia (2) astfel încât răspunsul la impuls al acestuia, $h[n]$, sau răspunsul în frecvență, $H(e^{j\omega})$, să aproximeze într-un anumit mod specificațiile în timp discret sau în frecvență impuse la proiectare. Domeniul în care este rezolvată problema aproximării (timp sau frecvență) este determinat de aplicația specifică. Metodele de proiectare a filtrelor *RII* pot fi clasificate în două categorii:

1. *Metode indirecte* bazate pe proiectarea în prealabil a unui filtru analogic și apoi transformarea acestuia într-unul digital;
2. *Metode directe* urmărind realizarea filtrelor digitale fără referire la un model analogic. Aceste metode se bazează pe utilizarea criteriilor de aproximare în domeniile timp sau frecvență.

2. Proiectarea indirectă a filtrelor RII

Procedura cea mai frecvent utilizată de proiectare a unui filtru digital *RII* constă în transformarea unui filtru analogic într-unul digital, echivalent ca performanțe. Această abordare prezintă două avantaje:

- a) exploatează cunoștințele și metodele de proiectare a filtrelor analogice;
- b) există transformări care conservă proprietățile de selectivitate ale modelului analogic.

Pornind de la specificațiile referitoare la performanțele filtrului digital, proiectarea acestuia necesită parcurgerea următoarelor etape:

1. Transformarea specificațiilor dorite pentru filtrul digital în specificații impuse filtrului analogic prototip;
2. Obținerea funcției de transfer a filtrului analogic prototip astfel încât să se realizeze specificațiile deduse la punctul 1;
3. Transformarea funcției de transfer a filtrului analogic în funcția de transfer echivalentă ca performanțe a filtrului digital.

După obținerea funcției de transfer $H_a(s)$ a prototipului analogic trebuie găsită funcția de transfer $H(z)$ a filtrului digital, operație denumită frecvent *discretizarea filtrului analogic*. Aceasta necesită în domeniul timp trecerea de la variabila continuă t la cea discretă n , ceea ce implică pentru caracterizarea în frecvență o transformare de la planul s la planul Z . Orice astfel de transformare trebuie să satisfacă două cerințe fundamentale:

- I. *Să transforme un filtru analogic stabil într-unul digital de asemenea stabil;*
- II. *Să conserve caracteristicile de selectivitate (de modul și eventual fază) ale filtrului analogic.*

Îndeplinirea primei cerințe necesită transformarea semiplanului stâng al planului s în interiorul cercului de rază unitate din planul Z , în timp ce îndeplinirea celei de-a doua cerințe pretinde *conversia liniară* a axei $\{j\Omega\}$ a planului s în conturul cercului de rază unitate ($z = e^{j\omega}$) al planului Z . Procedurile utilizate pentru discretizarea funcției de transfer $H_a(s)$ satisfac cele două cerințe într-un mod mai mult sau mai puțin satisfăcător. Sunt cunoscute în literatura de specialitate 4 asemenea proceduri și anume:

1. *Metoda transformării ecuației diferențiale* ce leagă semnalele de intrare și ieșire ale prototipului analogic în *ecuația cu diferențe finite* necesară pentru caracterizarea în domeniul timp a filtrului digital;
2. *Metoda invarianței răspunsului la impuls;*
3. *Metoda transformării biliniare;*
4. *Metoda transformării în z adaptate.*

În continuare vor fi prezentate procedurile 2 și 3 care satisfac integral cerința I și foarte bine (în anumite condiții) cerința II. În schimb rezultatele obținute cu metodele 1 și 4 sunt nesatisfăcătoare în ceea ce privește conservarea proprietăților de selectivitate pe un domeniu larg de frecvență.

2.1. Metoda invarianței răspunsului la impuls

Această metodă se bazează pe conservarea răspunsului la impuls, în sensul că răspunsul la impuls al filtrului digital, notat $h[n]$ este versiunea eșantionată a răspunsului la impuls al filtrului analogic, notat $h_a(t)$. În continuare vor fi utilizate notația $\Omega = 2\pi F$ pentru a desemna domeniul frecvență al filtrului analogic și notația $\omega = 2\pi f$ pentru a desemna domeniul frecvență normală al filtrului digital.

Procedura de obținere a filtrului digital prin metoda invarianței răspunsului la impuls necesită parcurgerea următoarelor etape:

1. Se descompune $H_a(s)$ în fracții elementare:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad (3)$$

2. Se determină răspunsul la impuls al filtrului analogic, $h_a(t)$:

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - s_k} \right\} = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \quad (4)$$

3. Se determină funcția pondere a filtrului digital:

$$h[n] = T h_a(nT) = T \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u[n] \quad \text{cu} \quad u[n] = u(nT) \quad (5)$$

4. Se calculează funcția de transfer $H(z)$:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(T \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} \right) z^{-n} = T \sum_{k=1}^N A_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_k nT} z^{-n} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{T A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (6)$$

Efectuând calculele se obțin coeficienții a_i, b_i ai filtrului digital.

Se demonstrează că filtrul digital reproduce răspunsul în frecvență al filtrului analogic pe intervalul de frecvență

$$\Omega \in \left[-\frac{\Omega_s}{2}, \frac{\Omega_s}{2} \right] \Leftrightarrow \omega \in [-\pi, \pi]$$

dacă și numai dacă sunt îndeplinite condițiile:

$$h[n] = Th_a(nT) \quad (7)$$

$$\omega = \Omega T \Leftrightarrow \Omega = \frac{\omega}{T} \quad (8)$$

$$H_a(j\Omega) = 0 \text{ la } |\Omega| \geq \Omega_M \quad (9)$$

Metoda dă rezultate bune pentru discretizarea filtrelor analogice al căror răspuns la impuls satisface (chiar aproximativ) condiția de semnal de bandă limitată (relația (9)). Ca atare poate fi aplicată la proiectarea FTJ și FTB dar nu și la proiectarea FTS, FOB, FTT. Există totuși FTS, FOB, FTT obținute pe calea invarianței răspunsului la impuls, prin proiectarea unui prototip analogic de tip trece jos, discretizarea acestuia conform relației (7) și apoi transformarea filtrului digital trece jos într-unul trece sus sau oprește bandă, folosind transformări de frecvență adecvate.

În realitate funcțiile de transfer ale filtrelor analogice nu satisfac decât cu aproximație condiția (9), ele existând pe toată axa frecvențelor, fapt care conduce la efecte de aliere spectrală. Uneori se utilizează un filtru analogic trece jos cu pantă abruptă a caracteristicii de atenuare (denumit *filtru de gardă*), conectat în cascadă cu filtrul analogic prototip pentru a realiza condiția de răspuns în frecvență de bandă limitată al filtrului rezultat.

2.2. Metoda transformării biliniare

Transformarea biliniară este o transformare de la planul s la planul Z care conservă forma algebrică (funcție rațională) a funcției de transfer. Este definită prin relația (T reprezintă perioada de eșantionare):

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Leftrightarrow \frac{sT}{2} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (10)$$

Avantajele metodei transformării biliniare, care determină utilizarea cu precădere a acesteia pentru discretizarea prototipului analogic, constau în următoarele:

- Erorile de aliere inerente metodei invarianței răspunsului la impuls sunt eliminate deoarece întreaga axă $\{j\Omega\}$ a planului s este transformată în conturul cercului unitate din planul z ;
- Transformă sisteme analogice stabile în sisteme discrete stabile (deci cerința I este îndeplinită);
- Este o transformare algebrică simplă, funcția de transfer a filtrului digital obținându-se din cea a filtrului analogic prin substituția:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (11)$$

Există totuși un neajuns al acestei metode constând în transformarea neliniară a axei $\{j\Omega\}$ a planului s în cercul de rază unitate $z = e^{j\omega}$ al planului Z . Pentru a evalua natura și mărimea neliniarității se consideră $s = j\Omega$ în relația (10), fapt ce implică $|z|=1$, adică $z = e^{j\omega}$. Rezultă:

$$\frac{j\Omega T}{2} = \frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}} = j \tan \frac{\omega}{2} \Leftrightarrow \Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2} \Leftrightarrow \omega = 2 \tan^{-1} \frac{\Omega T}{2} \quad (12)$$

Neliniaritatea implică restrângerea domeniului de aplicabilitate a metodei. Această metoda este indicată atunci când răspunsul sistemului analogic este constant în frecvență sau este format din porțiuni

pe care este aproximativ constant. Nu poate fi aplicată deci pentru diferențiatoare și filtre Bessel, deoarece transformarea nu conservă liniaritatea caracteristicii de amplitudine, respectiv a celei de fază. Se aplică cu succes la proiectarea FTJ, FTS, FTB, FOB, FTT.

2.3. Proiectarea indirectă a filtrelor digitale RII folosind funcții MATLAB

I. Proiectarea filtrelor analogice

Funcția de transfer a unui filtru analogic de ordinul N este:

$$H_a(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=0}^M c_i s^i}{\sum_{i=0}^N d_i s^i}, \quad N \geq M \quad (13)$$

Răspunsul în frecvență (la frecvențe fizice) este funcția de sistem evaluată pe axa imaginară a planului s . Proiectarea unui filtru analogic constă în determinarea coeficienților c_i, d_i , care conduc la optimizarea pătratului modulului funcției de transfer $|H_a(j\Omega)|^2$, în conformitate cu un anumit criteriu de minimizare a erorii dintre funcția dorită (*funcția de aproximat*) și cea realizată (*funcția aproximantă*). Se lucrează cu $|H_a(j\Omega)|^2$ (și nu cu $|H_a(j\Omega)|$) pentru că este o funcție rațională.

După determinarea lui $|H_a(j\Omega)|^2$ se exprimă:

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{C(s)}{D(s)} \frac{C(-s)}{D(-s)} = |H_a(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega^2 = -s^2} = \frac{E(-s^2)}{G(-s^2)} \quad (14)$$

și apoi se separă $H_a(s)$ astfel:

- poliile lui $H_a(s)$ sunt zerourile lui $G(-s^2)$ localizate în semiplanul stâng (determinare unică bazată pe stabilitatea filtrului);
- zerourile lui $H_a(s)$ se obțin din zerourile lui $E(-s^2)$ prin distribuirea acestora din urmă în mod egal între $C(s)$ și $C(-s)$, fără a separa perechile de zerouri complex conjugate, aceasta spre a obține $H_a(s)$ cu coeficienți reali. Determinarea lui $C(s)$ nu este unică. Spre deosebire de poli, zerourile pot fi localizate și pe axa $j\Omega$ dar numai cu ordin de multiplicitate par în $H_a(s)H_a(-s)$.

Se vor prezenta în continuare pe scurt funcțiile de transfer și caracteristicile filtrele analogice de tip Butterworth, Cebîșev I, Cebîșev II și eliptice (Cauer), ce vor fi folosite apoi în proiectarea indirectă a filtrelor digitale.

- Filtre analogice de tip Butterworth

Răspunsul în frecvență al unui filtru analogic trece jos de tip Butterworth de ordinul N și frecvență de tăiere Ω_t este dat de expresia:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_t}\right)^{2N}} \quad (15)$$

Acesta realizează o caracteristică de tip maxim plat la $\Omega=0$ în sensul că primele $2N-1$ derivate sunt nule la $\Omega=0$. La $\Omega=\Omega_t$, indiferent de ordinul N , pătratul modulului este $1/2$. Creșterea lui N conduce însă la îngustarea zonei de tranziție. Caracteristica $|H_a(j\Omega)|^2$ realizează o aproximare de tip maxim plat și la $\Omega \rightarrow \infty$, pentru aceasta frecvență toate derivatele fiind nule.

- **Filtre analogice de tip Cebîșev I**

Filtrele Cebîșev de tipul I sunt filtre polinomiale (de tipul numai cu poli), având o caracteristică de modul cu ripluri egale în banda de trecere și monoton descrescătoare în banda de oprire. Dintre toate filtrele polinomiale de ordinul N , filtrele Cebîșev de tipul I au zona de tranziție cea mai îngustă.

Pentru un filtru analogic trece jos de tip Cebîșev I de ordinul N și cu frecvența limită superioară a benzii de trecere Ω_e , pătratul modulului funcției de transfer este dat de relația:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_e}\right)} \quad (16)$$

în care $C_N(x)$ este polinomul Cebîșev de ordinul N :

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x), & \text{pentru } |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x), & \text{pentru } |x| > 1 \end{cases} \quad (17)$$

În banda de oprire, caracteristica monoton descrescătoare a modulului funcției de transfer realizează o aproximare de tip maxim plat a valorii ideale zero, deoarece toate derivatele sale se anulează pentru $\Omega \rightarrow \infty$. Panta de cădere a caracteristicii este cu atât mai mare cu cât ordinul filtrului este mai mare, iar pentru două filtre de același ordin panta este mai abruptă pentru cel cu ripluri mai mari în banda de trecere. Performanțele filtrului sunt complet precizate de parametrul ε ce fixează mărimea riplului în banda de trecere și de ordinul N ce determină abrupțivitatea caracteristicii de modul (sau atenuare).

- **Filtre analogice de tip Cebîșev II**

Filtrele Cebîșev de tipul II realizează o aproximare în sens Cebîșev a modulului funcției de transfer în zona de oprire, modulul descrescând monoton în zona de trecere. Se mai numesc și filtre *invers Cebîșev* deoarece, spre deosebire de filtrele Cebîșev de tipul I, inversează modul de aproximare a caracteristicii de modul (cu ripluri egale, respectiv maxim plat) în cele două benzi.

Pentru un filtru analogic trece jos de tip Cebîșev II de ordinul N și cu frecvența limită inferioară a benzii de oprire Ω_b , pătratul modulului funcției de transfer este dat de relația:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_b}{\Omega}\right)} = \frac{\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_b}{\Omega}\right)}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_b}{\Omega}\right)} \quad (18)$$

în care $C_N(x)$ este polinomul Cebîșev de ordinul N (vezi relația 4.17):

- **Filtre analogice de tip eliptic**

Filtrele eliptice (denumite și *filtre Cauer*) au o caracteristică de modul cu ripluri egale în ambele benzi de trecere și de oprire, motiv pentru care se mai numesc și filtre echiriplu. Aproximarea în sens Cebîșev a cerințelor filtrului trece jos ideal este extinsă la ambele benzi prin utilizarea funcției raționale Cebîșev $F_N(\Omega)$.

Pentru un filtru analogic trece jos de tip eliptic, de ordinul N , pătratul modulului funcției de transfer este dat de relația:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 F_N^2(\Omega)} \quad (19)$$

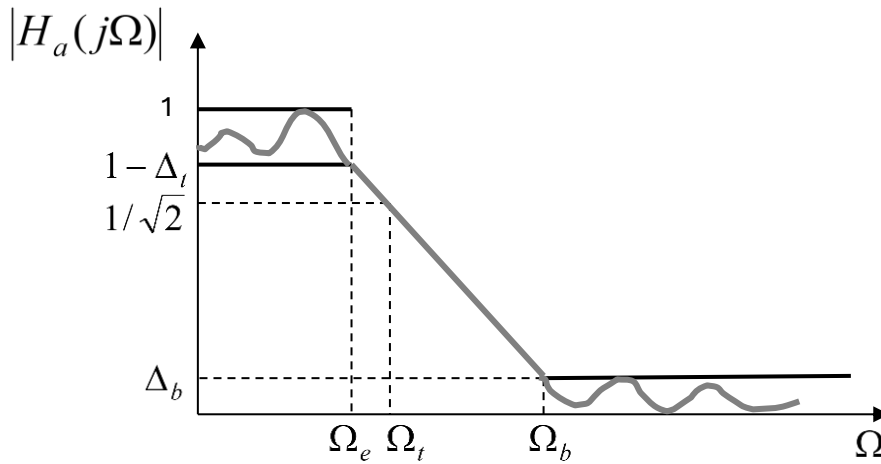
unde funcția rațională Cebîșev $F_N(\Omega)$, introdusă pentru prima dată de Cauer în teoria circuitelor liniare, se exprimă astfel:

$$F_N(\Omega) = \begin{cases} C_1 \prod_{i=1}^{\frac{N}{2}} \frac{\Omega^2 - \Omega_i^2}{\Omega^2 - \frac{\Omega_0^4}{\Omega_i^2}}, & \text{pentru } N = \text{par} \\ C_2 \prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} \Omega \frac{\Omega^2 - \Omega_i^2}{\Omega^2 - \frac{\Omega_0^4}{\Omega_i^2}}, & \text{pentru } N = \text{impar} \end{cases} \quad (20)$$

După cum se vede din această relație, funcția $F_N(\Omega)$ are polii în număr egal cu zerourile și plasați simetric față de acestea în raport cu frecvența Ω_0 , definită ca medie geometrică a frecvențelor limită de trecere și de oprire : $\Omega_0^2 = \Omega_e \Omega_b$.

Filtrele eliptice sunt considerate optimale, în sensul că, pentru un același ordin N și aceleași frecvențe limite Ω_e și Ω_b , realizează cele mai mici ripluri în benzile de trecere și de oprire comparativ cu toate celelalte tipuri de filtre.

Datele de gabarit pentru filtrele analogice (exemplificare pentru un FTJ)



Se consideră că:

- zona de trecere efectivă variază între valoarea maximă 1 și valoarea minimă $1 - \Delta_t$;
- zona de blocare variază între 0 și Δ_b ;
- $\Omega_e, \Omega_b, \Omega_t$ reprezintă în ordine frecvența de trecere efectivă, frecvența de oprire efectivă și frecvența de tăiere teoretică, exprimate în radiani/secundă.

Uzual la proiectare aceste performanțe sunt date în dB, sub forma atenuării maxime în banda de trecere efectivă, a_M și a atenuării minime în zona de oprire efectivă, a_m :

$$a_M = -20 \lg(1 - \Delta_t) \quad (21)$$

$$a_m = -20 \lg(\Delta_b) \quad (22)$$

Atenție:

Funcțiile MATLAB buttord, cheb1ord, cheb2ord și ellipord permit determinarea ordinului minim și a frecvenței de tăiere pentru tipurile de filtre analogice prezentate anterior (în ordine: *Butterworth*, *Cebîșev I*, *Cebîșev II* și *eliptice*), pornind de la specificațiile de gabarit.

Sintaxa generală:

[n,Wn]=nume_functie(Wp,Ws,Rp,Rs,'s')

- nume_functie poate fi oricare dintre funcțiile buttord, cheb1ord, cheb2ord și ellipord;
- Rp reprezintă dimensiunea riplului (exprimată în dB) din banda de trecere (atenuarea maximă din banda de trecere) iar Rs reprezintă dimensiunea riplului (exprimată în dB) din banda de oprire (atenuarea minimă din banda de oprire);
- Wp și Ws sunt frecvențele limită ale benzilor de trecere și de oprire; ele vor fi exprimate în radiani/secundă și vor fi mai mari ca 1; în cazul filtrelor trece bandă și oprește bandă Wp și Ws vor fi vectori cu două elemente;
- 's' indică faptul că este vorba de un filtru analogic;
- se vor returna:
 - 1) *ordinul minim* n (vezi relația (23)) al unui filtru analogic de tipul corespunzător dat de nume_functie, ce satisface condițiile de gabarit impuse prin Wp, Ws, Rp, Rs;
 - 2) *frecvența de tăiere* Wn (frecvența la 3 dB) a aceluiași filtru; în cazul filtrelor trece bandă și oprește bandă Wn va fi un vector cu două elemente deoarece aceste filtre prezintă două zone de tăiere.

Ordinul filtrului analogic n și frecvența sa de tăiere Wn, ce constituie argumentele de ieșire ale funcțiilor prezentate anterior, vor servi ca parametrii de intrare pentru o nouă categorie de funcții MATLAB – butter, cheby1, cheby2 și ellip – care au drept rezultat chiar coeficienții funcției de transfer a filtrului analogic respectiv.

În MATLAB, funcția de transfer a unui filtru analogic cu răspuns infinit la impuls de ordinul n este privită sub forma:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b(1)s^n + b(2)s^{n-1} + \dots + b(n)s + b(n+1)}{s^n + a(2)s^{n-1} + a(3)s^{n-2} + \dots + a(n)s + a(n+1)} \quad (23)$$

butter - Filtre analogice de tip Butterworth**Sintaxe:**

[b,a] = butter(n,Wn,'s')

- proiectează un *filtru analogic trece jos* de ordinul n cu frecvența de tăiere Wn (frecvența este exprimată în radiani/secundă); se vor returna vectorii linie b și a de lungime n + 1 ce conțin coeficienții funcției de transfer $H(s)$ a filtrului ($b = [b(1), b(2), \dots, b(n), b(n+1)]$, $a = [1, a(2), \dots, a(n), a(n+1)]$; vezi relația (4.23)); dacă Wn este un vector cu două elemente, $Wn = [w1, w2]$, cu $w1 < w2$, se va proiecta un *filtru analogic trece bandă* de ordinul 2n, cu banda de trecere cuprinsă între frecvențele w1 și w2; 's' indică faptul că este vorba despre un filtru analogic.

[b,a] = butter(n,Wn,'high','s')

- proiectează un *filtru analogic trece sus* de ordinul n cu frecvența de tăiere Wn;

[b,a] = butter(n,Wn,'stop','s')

- Wn este un vector cu două elemente, $Wn = [w1, w2]$ cu $w1 < w2$; se va proiecta un *filtru analogic oprește bandă* de ordinul 2n, cu banda de oprire cuprinsă între w1 și w2.

cheby1 - Filtre analogice de tip Cebîșev I**Sintaxe:**

[b,a] = cheby1(n,Rp,Wn,'s')
 [b,a] = cheby1(n,Rp,Wn,'high','s')
 [b,a] = cheby1(n,Rp,Wn,'stop','s')

- rămân valabile aceleași considerente pentru parametrii de intrare și de ieșire ca în sintaxele de la funcția butter; în plus apare parametrul de intrare Rp care reprezintă dimensiunea riplului (exprimată în dB) din banda de trecere (atenuarea maximă din banda de trecere).

cheby2 - Filtre analogice de tip Cebîșev II**Sintaxe:**

[b,a] = cheby2(n,Rs,Wn,'s')
 [b,a] = cheby2(n,Rs,Wn,'high','s')
 [b,a] = cheby2(n,Rs,Wn,'stop','s')

- rămân valabile aceleași considerente pentru parametrii de intrare și de ieșire ca în sintaxele de la funcția butter; în plus apare parametrul de intrare Rs care reprezintă dimensiunea riplului (exprimată în dB) din banda de oprire (atenuarea minimă din banda de oprire).

ellip - Filtre analogice de tip eliptic (filtre Cauer)**Sintaxe:**

[b,a] = ellip(n,Rp,Rs,Wn,'s')
 [b,a] = ellip(n,Rp,Rs,Wn,'high','s')
 [b,a] = ellip(n,Rp,Rs,Wn,'stop','s')

- rămân valabile aceleași considerente pentru parametrii de intrare și de ieșire ca în sintaxele de la funcția butter; în plus apar parametrii de intrare Rp și Rs cu semnificațiile de la funcțiile cheby1 și cheby2.

Atenție:

Odată cu aflarea coeficienților funcției de transfer a filtrului analogic putem considera încheiate etapele 1 și 2 din cadrul proiectării indirecte a filtrelor digitale *RII* (vezi secțiunea 2.). Cea de a treia etapă constă în transformarea funcției de transfer a filtrului analogic în funcția de transfer echivalentă ca performanțe a filtrului digital. Această ultimă etapă se efectuează conform metodei de proiectare indirectă aleasă (poate fi oricare din cele 4 proceduri menționate – vezi secțiunea 2.).

În cadrul secțiunilor 2.1. și 2.2. au fost discutate pe larg două din cele 4 metode: *metoda invarianței răspunsului la impuls* și *metoda transformării biliniare*. Corespunzător acestor două metode, în MATLAB există funcțiile *impinvar* și *bilinear* ce vor fi prezentate în secțiunea următoare.

II. Transformarea funcției de transfer a filtrului analogic în funcția de transfer echivalentă ca performanțe a filtrului digital

Considerăm următoarele forme de exprimare pentru:

- funcția de transfer a unui filtru analogic:

$$H(s) = \frac{b(1)s^m + b(2)s^{m-1} + \dots b(m)s + b(m+1)}{a(1)s^n + a(2)s^{n-1} + \dots a(n)s + a(n+1)} =$$

$$= k \cdot \frac{(s - z(1))(s - z(2)) \dots (s - z(m))}{(s - p(1))(s - p(2)) \dots (s - p(n))} \quad (24)$$

- funcția de transfer a unui filtru digital:

$$H(z) = \frac{bd(1) + bd(2)z^{-1} + \dots bd(m)z^{-(m-1)} + bd(m+1)z^{-m}}{ad(1) + ad(2)z^{-1} + \dots ad(n)z^{-(n-1)} + ad(n+1)z^{-n}} =$$

$$= kd \cdot \frac{(1 - zd(1)z^{-1})(1 - zd(2)z^{-1}) \dots (1 - zd(m)z^{-1})}{(1 - pd(1)z^{-1})(1 - pd(2)z^{-1}) \dots (1 - pd(n)z^{-1})} \quad (25)$$

impinvar - Metoda invarianței răspunsului la impuls

Sintaxa:

[bd,ad] = impinvar(b,a,Fs)

- vectorii b și a vor conține valorile coeficienților numărătorului și respectiv numitorului funcției de transfer a filtrului analogic:
 $b = [b(1), b(2), \dots, b(n), b(m+1)]$, $a = [1, a(2), \dots, a(n), a(n+1)]$; vezi relația (24);
- Fs reprezintă frecvența de eșantionare exprimată în Hz; *dacă nu este precizată se alege în mod implicit* $Fs = 1\text{Hz}$;
- *ordinul numărătorului nu poate fi mai mare decât ordinul numitorului pentru funcția de transfer a filtrului analogic* ($m \leq n$);
- vor rezulta vectorii linie bd și ad ce vor conține valorile coeficienților numărătorului și respectiv numitorului funcției de transfer a filtrului digital:
 $bd = [bd(1), bd(2), \dots, bd(n), bd(m+1)]$, $ad = [1, ad(2), \dots, ad(n), ad(n+1)]$ (relația (25)).

Atenție: **Pentru variantele de MATLAB 4**

Funcția MATLAB impinvar face transformarea din domeniul analogic în domeniul discret considerând $h[n] = h_a(nT)$ ceea ce diferă de relația teoretică (7). Este deci necesară o înmulțire cu $T = 1/Fs$ a vectorului bd obținut.

bilinear - Metoda transformării biliniare

Sintaxe:

[bd,ad] = bilinear(b,a,Fs)

- *vectorii linie* b și a vor conține valorile coeficienților numărătorului și respectiv numitorului funcției de transfer a filtrului analogic:
 $b = [b(1), b(2), \dots, b(n), b(m+1)]$, $a = [1, a(2), \dots, a(n), a(n+1)]$; vezi relația (24);
- Fs reprezintă frecvența de eșantionare exprimată în Hz;
- *ordinul numărătorului nu poate fi mai mare decât ordinul numitorului pentru funcția de transfer a filtrului analogic* ($m \leq n$);

- vor rezulta *vectorii linie* bd și ad ce vor conține valorile coeficienților numărătorului și respectiv numitorului funcției de transfer a filtrului digital:
 $bd = [bd(1), bd(2), \dots, bd(n), bd(m+1)]$, $ad = [1, ad(2), \dots, ad(n), ad(n+1)]$ (relația (25)).

[zd,pd,kd] = bilinear(z,p,k,Fs)

- *vectorii coloană* z și p conțin valorile zerourilor și polilor funcției de transfer a filtrului analogic iar valoarea k reprezintă câștigul ($z = [z(1), z(2), \dots, z(m)]$, $p = [p(1), p(2), \dots, p(n)]$; vezi relația (24));
- F_s reprezintă frecvența de eșantionare exprimată în Hz;
- *ordinul numărătorului nu poate fi mai mare decât ordinul numitorului pentru funcția de transfer a filtrului analogic* ($m \leq n$);
- vor rezulta *vectorii coloană* zd și pd ce conțin valorile zerourilor și polilor funcției de transfer a filtrului digital și valoarea kd ce reprezintă câștigul ($zd = [zd(1), zd(2), \dots, zd(m)]$, $pd = [pd(1), pd(2), \dots, pd(n)]$; vezi relația (25));

Exemple:

1. Să se proiecteze prin metoda invarianței răspunsului la impuls un filtru digital trece jos de tip Butterworth, știind că:

- la frecvența $F_e = 2\text{kHz}$ atenuarea este mai mică de 1 dB, adică $a_M = 1\text{dB}$;
- la frecvența $F_b = 3\text{kHz}$ atenuarea este mai mare de 20 dB, adică $a_m = 20\text{dB}$;
- frecvența de eșantionare este $F_s = 20\text{kHz}$.

2. Reluați problema precedentă folosind metoda transformatei biliniare.

Rezolvare 1. Se determină în primul rând frecvențele limită normate ale benzilor de trecere și oprire:

$$\omega_e = 2\pi \frac{F_e}{F_s} = 0,2\pi \quad \text{și} \quad \omega_b = 2\pi \frac{F_b}{F_s} = 0,3\pi$$

Ținând cont de legătură dintre cele două axe de frecvență (vezi relația (4.8)) se calculează pentru filtrul analogic:

$$\Omega_e = \frac{\omega_e}{T_s} = \omega_e F_s = 4000\pi \text{ radiani/secundă}$$

$$\Omega_b = \frac{\omega_b}{T_s} = \omega_b F_s = 6000\pi \text{ radiani/secundă}$$

```
Fs=20000;
we=2*pi*2/20;
wb=2*pi*3/20;
Oe=we*Fs;
Ob=wb*Fs;
```

Avem acum toți parametrii de intrare ai funcției `buttord` utilizată pentru determinarea ordinului filtrului analogic și a frecvenței sale de tăiere (vezi sintaxa):

```
[n,Wt]=buttord(Oe,Ob,1,20,'s')
n =
    8
Wt =
    1.4144e+04
```

//ordinul filtrului analogic este $n = 8$ iar frecvența sa de tăiere este egală cu 14144 radiani/secundă (se observă că această valoare aparține într-adevăr intervalului $[\Omega_e, \Omega_b]$).

Valorile n și Wt obținute reprezintă parametrii de intrare pentru funcția butter ce va avea ca rezultat coeficienții funcției de transfer a filtrului analogic (vezi sintaxa și relația (23)):

```
[bs,as]=butter(n,Wt,'s')
```

```
bs =
```

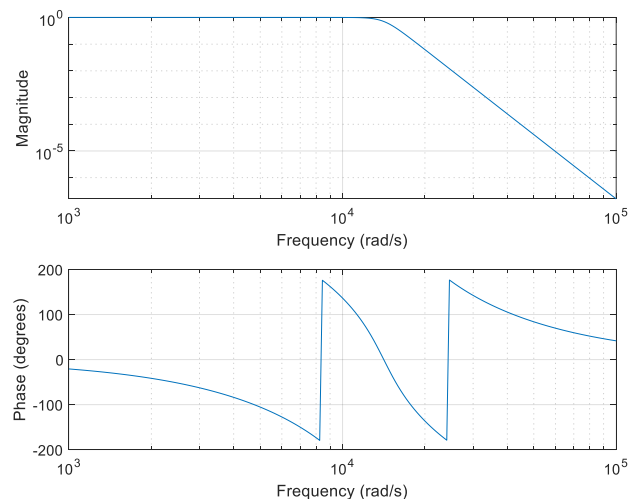
```
1.0e+33 *  
0 0 0 0 0 0 0 0 1.6017
```

```
as =
```

```
1.0e+33 *  
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0006 1.6017
```

Caracteristicile amplitudine-frecvență și fază-frecvență ale filtrului analogic se pot vizualiza folosind funcția freqs (asemănător cu freqz); vezi help freqs.

```
figure(1), freqs(bs,as)
```



Acești doi vectori, bs și as , rezultați în urma comenzii precedente, vor servi drept argumente de intrare pentru funcțiaimpinvar ce va calcula valorile coeficienților funcției de transfer a filtrului digital dorit (vezi sintaxa și relațiile (24) și (25)):

```
[bd,ad]=impinvar(bs,as,Fs)
```

```
bd =
```

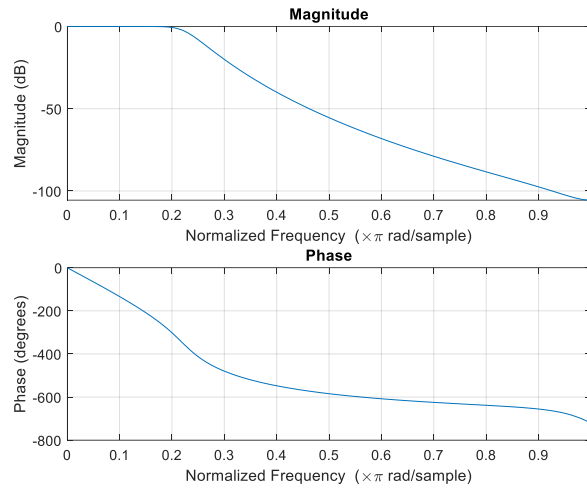
```
0.0000 0.0000 0.0006 0.0035 0.0045 0.0014 0.0001 0.0000 0
```

```
ad =
```

```
1.0000 -4.4793 9.2601 -11.3858 9.0379 -4.7181 1.5759 -0.3070 0.0266
```

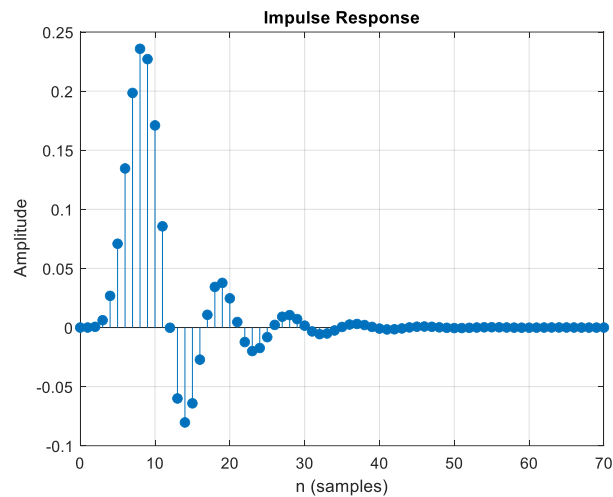
Caracteristicile amplitudine-frecvență și fază-frecvență ale filtrului digital se pot vizualiza folosind funcția freqz:

```
figure(2), freqz(bd,ad)
```



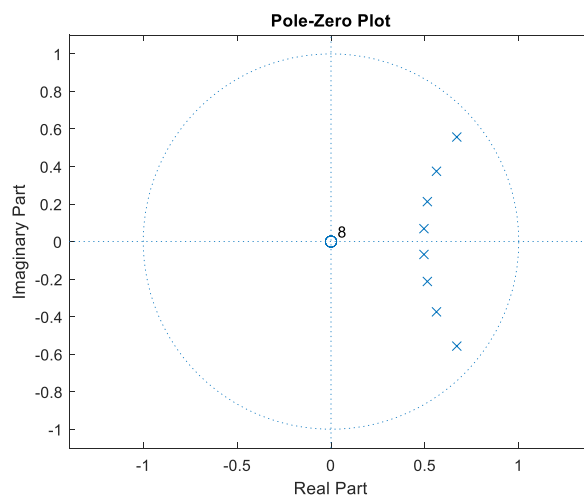
Funcția pondere a filtrului se poate vizualiza folosind comanda `impz`:

`figure(3),impz(bd,ad),grid`



Pentru a verifica pe cale grafică stabilitatea filtrului digital obținut (toți polii trebuie să fie în interiorul cercului de rază unitate) putem folosi funcția `zplane`, vizualizând numai valorile polilor funcției de transfer:

`figure(4),zplane(1,ad)`



Rezolvare 2. Metoda transformatei biliniare presupune transformarea axei de frecvență conform relației (12):

$$\Omega_e = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega_e}{2} = 2F_s \tan \frac{\omega_e}{2}$$

$$\Omega_b = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega_b}{2} = 2F_s \tan \frac{\omega_b}{2}$$

Valorile pentru ω_e și ω_b sunt desigur aceleași ca în problema precedentă.

```

Fs=20000;
we=2*pi*2/20;
wb=2*pi*3/20;
Oe=2*Fs*tan(we/2);
Ob=2*Fs*tan(wb/2);

```

Se vor urma aceiași pași ca în cazul metodei invarianței răspunsului la impuls, prezentată în problema precedentă:

```

[n,Wt]=buttord(Oe,Ob,1,20,'s')
[bs,as]=butter(n,Wt,'s')
[bd,ad]=bilinear(bs,as,Fs)

```

Se observă că ordinul filtrului va fi $n = 7$, deci mai mic cu o unitate decât la metoda invarianței răspunsului la impuls.

E1. Exerciții:

1. Să se proiecteze prin metoda transformatei biliniare un filtru digital trece sus de tip Butterworth, știind că:

- la frecvența $F_b = 2\text{kHz}$ atenuarea este mai mare de 40dB;
- la frecvența $F_e = 4\text{kHz}$ atenuarea este mai mică de 1dB;
- frecvența de eșantionare este $F_s = 24\text{kHz}$.

Să se reprezinte grafic:

- caracteristicile amplitudine-frecvență și fază-frecvență ale filtrului analogic și ale filtrului digital obținut;
- răspunsul la impuls al filtrului digital;
- poziționarea în planul Z a polilor funcției de transfer a filtrului digital;

Se poate realiza proiectarea și prin metoda invarianței răspunsului la impuls?

2. Reluați problema 1 în cazul unui filtru de tip Cebîșev I. Comentați diferențele obținute.

3. Reluați problema 1 în cazul unui filtru de tip Cebîșev II. Comentați diferențele obținute.

4. Reluați problema 1 în cazul unui filtru de tip eliptic. Comentați diferențele obținute.

5. Se consideră un filtru trece jos de tip Butterworth, de ordinul 3, având frecvența de tăiere $F_t = 4\text{kHz}$. Să se determine funcția de transfer $H(z)$ a filtrului digital obținut:

- a) prin metoda invarianței răspunsului la impuls;
- b) prin metoda transformării biliniare.

Se va considera frecvența de eșantionare $F_s = 40\text{kHz}$.

Să se reprezinte grafic:

- caracteristicile amplitudine-frecvență și fază-frecvență ale filtrului analogic și ale filtrului digital obținut;
- răspunsul la impuls al filtrului digital;
- poziționarea în planul Z a polilor funcției de transfer a filtrului digital;

6. Reluați problema 5 în cazul unui filtru de tip Cebîșev I cu o atenuare maximă în banda de trecere de 1dB. Comentați rezultatele obținute.

7. Reluați problema 5 în cazul unui filtru de tip Cebîșev II cu o atenuare minimă în banda de oprire de 40dB. Comentați rezultatele obținute.

8. Reluați problema 5 în cazul unui filtru de tip eliptic cu o atenuare minimă în banda de oprire de 40dB și o atenuare maximă în banda de trecere de 1dB. Comentați rezultatele obținute.

9. Să se proiecteze prin metoda invarianței răspunsului la impuls un filtru digital trece bandă de tip Butterworth, știind că:

- la frecvențele $F_{e1} = 4\text{kHz}$ și $F_{e2} = 6\text{kHz}$ atenuarea este mai mică de 1dB;
- la frecvențele $F_{b1} = 3\text{kHz}$ și $F_{b2} = 7\text{kHz}$ atenuarea este mai mare de 40dB;
- frecvența de eșantionare este $F_s = 20\text{kHz}$.

Să se reprezinte grafic:

- caracteristicile amplitudine-frecvență și fază-frecvență ale filtrului analogic și ale filtrului digital obținut;
- răspunsul la impuls al filtrului digital;
- poziționarea în planul Z a polilor funcției de transfer a filtrului digital;

Rezolvați problema folosind și metoda transformatei biliniare.

10. Reluați problema 9 în cazul unui filtru de tip Cebîșev I. Comentați diferențele obținute.

11. Reluați problema 9 în cazul unui filtru de tip Cebîșev II. Comentați diferențele obținute.

12. Reluați problema 9 în cazul unui filtru de tip eliptic. Comentați diferențele obținute.

13. Să se proiecteze prin metoda transformatei biliniare un filtru digital oprește bandă de tip Butterworth, știind că:

- la frecvențele $F_{e1} = 3\text{kHz}$ și $F_{e2} = 7\text{kHz}$ atenuarea este mai mică de 1dB;
- la frecvențele $F_{b1} = 4\text{kHz}$ și $F_{b2} = 6\text{kHz}$ atenuarea este mai mare de 40dB;
- frecvența de eșantionare este $F_s = 20\text{kHz}$.

Să se reprezinte grafic:

- caracteristicile amplitudine-frecvență și fază-frecvență ale filtrului analogic și ale filtrului digital obținut;
- răspunsul la impuls al filtrului digital;
- poziționarea în planul Z a polilor funcției de transfer a filtrului digital;

Se poate realiza proiectarea și prin metoda invarianței răspunsului la impuls?

14. Reluați problema 13 în cazul unui filtru de tip Cebîșev I. Comentați diferențele obținute.

15. Reluați problema 13 în cazul unui filtru de tip Cebîșev II. Comentați diferențele obținute.

16. Reluați problema 13 în cazul unui filtru de tip eliptic. Comentați diferențele obținute.

17. Să se proiecteze un filtru digital trece jos pornind de la un filtru analogic de tip Butterworth de ordinul 2 și frecvența de tăiere $F_t = 5\text{kHz}$. Frecvența de eșantionare este $F_s = 40\text{kHz}$. Se vor folosi:

a) metoda invarianței răspunsului la impuls;

b) metoda transformării biliniare.

Reluați problema pentru cazul unui filtru trece sus. Ce observați?

18. Fie filtrul analogic cu funcția de transfer $H(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s^2+1}{s^2+s+1}$. Converteți acest filtru analogic într-un filtru digital *RII* folosind metoda transformării biliniare. Se știe că $T_s = 0,5$. Ce fel de filtru se obține?

3. Proiectarea directă a filtrelor RII

Metodele de proiectare din această categorie se bazează pe optimizare numerică și permit obținerea de filtre digitale ce aproximează un anumit răspuns în domeniul timp sau în domeniul frecvență. Aceste metode presupun alegerea unui criteriu de minimizare a erorii de aproximare și utilizarea unui algoritm pentru determinarea coeficienților funcției de transfer a filtrului (dacă se lucrează în domeniul frecvență) sau a răspunsului la impuls (în cazul în care se lucrează în domeniul timp).

Funcțiile MATLAB `buttord`, `cheb1ord`, `cheb2ord` și `ellipord` prezentate în cadrul secțiunii precedente, permit determinarea ordinului minim și a frecvenței de tăiere a filtrelor digitale. În MATLAB, funcția de transfer a unui filtru digital *RII* de ordinul n este privită sub forma:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + \dots + b(n)z^{-(n-1)} + b(n+1)z^{-n}}{1 + a(2)z^{-1} + a(3)z^{-2} + \dots + a(n)z^{-(n-1)} + a(n+1)z^{-n}} \quad (26)$$

Sintaxa generală:

[n,Wn]=nume_funcție(Wp,Ws,Rp,Rs)

- `nume_funcție` poate fi oricare dintre funcțiile `buttord`, `cheb1ord`, `cheb2ord` și `ellipord`;
- `Rp` reprezintă dimensiunea riplului (exprimată în dB) din banda de trecere (atenuarea maximă din banda de trecere) iar `Rs` reprezintă dimensiunea riplului (exprimată în dB) din banda de oprire (atenuarea minimă din banda de oprire);
- `Wp` și `Ws` sunt frecvențele limită benzilor de trecere și de oprire; ele au valori cuprinse între 0 și 1, unde 1 corespunde jumătății frecvenței de eșantionare, calculul făcându-se astfel:

$$\text{Frecvența[Hz]} / (\text{Frecvența}_{\text{eșantionare}}[\text{Hz}]/2);$$

În cazul filtrelor trece bandă și oprește bandă `Wp` și `Ws` vor fi vectori cu două elemente;

- se vor returna:
 - 1) *ordinul minim* n (vezi relația (4.26)) al unui filtru digital de tipul corespunzător dat de `nume_funcție`, ce satisface condițiile de gabarit impuse prin `Wp`, `Ws`, `Rp`, `Rs`;
 - 2) *frecvența de tăiere* Wn (frecvența la 3 dB) a aceluiași filtru; în cazul filtrelor trece bandă și oprește bandă Wn va fi un vector cu două elemente deoarece aceste filtre prezintă două zone de tăiere.

De asemenea, funcțiile MATLAB `butter`, `cheby1`, `cheby2`, `ellip` permit proiectarea directă a filtrelor digitale *RII* (pe baza aproximării Cebîșev direct în domeniul digital). Sintaxele sunt asemănătoare cu cele prezentate pentru cazul filtrelor analogice cu deosebirea că dispăre parametrul de intrare 's' (care preciza că este vorba de un filtru analogic) iar frecvențele Wn au valori cuprinse între 0 și 1, unde 1 corespunde jumătății frecvenței de eșantionare, calculul făcându-se după regula anterioară:

$$\text{Frecvența[Hz]} / (\text{Frecvența}_{\text{eșantionare}}[\text{Hz}]/2).$$

Verificați sintaxele acestor funcții folosind comanda `help`.

Atenție:

În MATLAB există și alte funcții ce permit proiectarea directă a filtrelor digitale *RII*:

- `prony` – proiectare prin metoda Prony;
- `stmcb` – proiectare folosind algoritmul Steiglitz-McBride;

- yulewalk – proiectare folosind o aproximare în sensul celor mai mici pătrate, bazată pe o variantă modificată a ecuațiilor Yule-Walker.

Verificați sintaxele acestor funcții folosind comanda help.

E2. Exerciții:

1. Rezolvați problemele 1-4 și 9-16 din cadrul exercițiilor **E1** prin proiectare directă cu ajutorul funcțiilor MATLAB prezentate.

2. Proiectați un filtru digital RII trece jos de tip Cebâșev 1 de ordinul 5, frecvența de tăiere $F_t = 2\text{kHz}$, $F_s = 16\text{kHz}$, ripluri $R_p=1\text{dB}$, $R_s=20\text{dB}$.

Aplicați la intrarea filtrului proiectat un semnal sinusoidal de frecvență variabilă între 100 Hz și $F_s/2$ generat cu ajutorul funcției Matlab **chirp** (help chirp). Durata semnalului generat este de 2 secunde. ATENȚIE! la generarea argumentului t al funcției **chirp** trebuie să se țină seama de frecvența de eșantionare ($t = 0:1/F_s:2$).

- Reprezentați pe același figură, folosind **subplot**, trei grafice reprezentând semnalele de la intrarea și ieșirea filtrului și caracteristica amplitudine-frecvență normată a filtrului proiectat.
- Reprezentați, folosind funcția **spectrogram**, spectrograma semnalelor de la intrarea și ieșirea filtrului.

3. Proiectați un filtru digital RII trece jos de tip Cabâșev 2 de ordinul 4, frecvența de tăiere $F_t = 0.5\text{kHz}$, frecvența de eșantionare $F_s = 16\text{kHz}$. Aplicați la intrarea filtrului proiectat un semnal audio eșantionat cu F_s citit dintr-un fișier wav cu ajutorul funcției Matlab **wavread** (help wavread).

Tema de casă

I. Proiectați în Matlab câte un filtru digital de tipul și cu parametri ca la problemele din exercițiul **E1** cu metodele indirecte sau directe discutate.

- Determinați (dacă este cazul) ordinul și frecvența de tăiere la 3dB.
- Determinați coeficienții funcției filtrului analogic $H_a(s)$ (dacă este cazul), și ai filtrului digital $H(z)$.
- Reprezentați grafic răspunsul în frecvență și poziția polilor și a zerourilor pentru filtrul analogic (dacă este cazul).
- Reprezentați grafic răspunsul în frecvență și poziția polilor și a zerourilor pentru filtrul digital proiectat.
- Reprezentați grafic caracteristica amplitudine [dB] - frecvență [Hz] a filtrului digital proiectat și determinați cu ajutorul zoom-ului și a cursorilor câștigul filtrului la frecvențele de tăiere din tabel verificând condițiile de gabarit impuse.

II. Aplicați la intrarea filtrului proiectat un semnal sinusoidal de frecvență variabilă între 100 Hz și $F_s/2$ generat cu ajutorul funcției Matlab **chirp** (>> help chirp). Durata semnalului generat este de 2 secunde. ATENȚIE! la generarea argumentului t al funcției **chirp** trebuie să se țină seama de frecvența de eșantionare ($t = 0:1/F_s:2$).

- Reprezentați pe același figură, folosind **subplot**, trei grafice reprezentând semnalele de la intrarea și ieșirea filtrului și caracteristica amplitudine-frecvență normată a filtrului proiectat.
- Reprezentați, folosind funcția **spectrogram**, spectrograma semnalelor de la intrarea și ieșirea filtrului.