

FILTRE LC PROIECTATE PE BAZA PARAMETRILOR DE LUCRU

1. Obiectul lucrării

Măsurători asupra unor filtre LC obținute prin sinteză pe baza parametrilor de lucru și anume gabaritul atenuării de lucru și rezistențele de terminație.

2. Aspecte teoretice

Proiectarea filtrelor LC pe baza parametrilor de lucru necesită parcurgerea următoarelor etape:

a) Determinarea funcției de transfer de lucru $H_c(s)$ astfel încât să fie îndeplinite condițiile impuse filtrului.

b) Determinarea unui set de parametri ce caracterizează diportul LC. Pentru determinare se folosesc: funcția de transfer $H(s)$ și rezistențele de terminație. Parametrii determinați pot fi: impedanțele de intrare, elementele matricei de impedanță $[z]$ sau elementele matricei de admitanță $[y]$.

c) Sinteza diportului LC pe baza parametrilor determinați la punctul b). Procedura utilizată este sinteza în scară cu controlul zerourilor de transmisiune.

d) Determinarea elementelor de circuit. Procedura are la bază relația lui Feldtkeller, specifică diporților pur reactivi, terminați la cele două porți pe impedanțe rezistive:

$$|\rho_{in_1}(j\eta)|^2 + |H_c(j\eta)|^2 = 1, \quad (1)$$

unde $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ este frecvența normată. Coeficientul de reflexie la poarta 1 a filtrului are expresia:

$$\rho_{in_1}(s) = \frac{Z_{in_1}(s) - R_g}{Z_{in_1}(s) + R_g}, \quad (2)$$

unde R_g este rezistența de la poarta 1, iar $Z_{in_1}(s)$ este impedanța de intrare la poarta 1 când poarta 2 este terminată pe R_s . Folosind normarea de frecvență și normarea la rezistența R_g rezultă:

$$\rho_{in_1}(s) = \frac{z_{in_1}(s_n) - 1}{z_{in_1}(s_n) + 1},$$

de unde se obține:

$$z_{in_1}(s_n) = \frac{Z_{in_1}(s)}{R_g} \Big|_{s=s_n\omega_0} = \frac{1 + \rho_{in_1}(s_n)}{1 - \rho_{in_1}(s_n)}. \quad (3)$$

În relația (1), $H_c(s)$ este funcția de transfer compusă, care are expresia:

$$H_c(s) = \frac{2U_2}{E} \sqrt{\frac{R_g}{R_s}}. \quad (4)$$

În cazul unui filtru trece jos de tip Butterworth pătratul modulului funcției de transfer compuse este:

$$|H_c(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_t}\right)^{2n}} = \frac{1}{1 + \eta^{2n}},$$

unde ω_t este frecvența unghiulară de tăiere a filtrului.

De exemplu, în cazul unui filtru trece jos de tip Butterworth de ordinul 3, se poate scrie:

$$\begin{aligned} |H_c(j\eta)|^2 \Big|_{\eta^2=-s_n^2} &= H_c(s_n)H_c(-s_n) = \frac{1}{1+\eta^6} \Big|_{\eta^2=-s_n^2} = \frac{1}{1-s_n^6} = \\ &= \frac{1}{(1-s_n)(1+s_n)(1+s_n+s_n^2)(1-s_n+s_n^2)} \end{aligned} \quad (5)$$

Rezultă funcția de transfer compusă pentru un filtru trece jos de tip Butterworth de ordinul 3:

$$H_c(s_n) = \frac{1}{(s_n+1)(s_n^2+s_n+1)} = \frac{1}{s_n^3+2s_n^2+2s_n+1}. \quad (6)$$

Din relația (1) se obține:

$$\begin{aligned} \rho_{in}(\eta^2) \Big|_{\eta^2=-s_n^2} &= \left(1 - \frac{1}{1+\eta^6}\right) \Big|_{\eta^2=-s_n^2} = \frac{\eta^6}{1+\eta^6} \Big|_{\eta^2=-s_n^2} = \\ &= \frac{-s_n^6}{1-s_n^6} = \frac{-s_n^6}{(1+s_n)(1+s_n+s_n^2)(1-s_n)(1-s_n+s_n^2)} \end{aligned}$$

Coeficientul de reflexie la poarta 1 va fi:

$$\rho_{in_1}(s_n) = \frac{\pm s_n^3}{s_n^3+2s_n^2+2s_n+1}. \quad (7)$$

Deci, în cazul unui filtru Butterworth de ordinul 3 de tip trece jos, găsim expresia impedanței de intrare normate de la poarta 1, folosind relația (3). Rezultă următoarele două soluții:

$$z_{in_1}^{(A)} = \frac{2s_n^3+2s_n^2+2s_n+1}{2s_n^2+2s_n+1} = s_n + \frac{1}{2s_n + \frac{1}{s+1}}, \quad (8)$$

$$z_{in_1}^{(B)} = \frac{1}{z_{in_1}^{(A)}}. \quad (9)$$

Schemele rezultate sunt prezentate în figurile 1b) și 1c).

Dacă considerăm o impedanță serie cu toate elementele pasive de circuit, căreia îi facem normare de rezistență cu R_0 și normare de frecvență cu frecvența unghiulară ω_0 , se obține:

$$\frac{Z(s)}{R_0} = \frac{R}{R_0} + \frac{s}{\omega_0} \frac{\omega_0 L}{R_0} + \frac{1}{\frac{s}{\omega_0} \omega_0 C R_0} = z(s_n) = r + s_n l + \frac{1}{s_n c}.$$

Rezultă expresiile valorilor normate și denormate:

$$r = \frac{R}{R_0} \Rightarrow R = rR_0, \quad (10)$$

$$l = \frac{\omega_0 L}{R_0} \Rightarrow L = \frac{lR_0}{\omega_0}, \quad (11)$$

$$c = \omega_0 R_0 C \Rightarrow C = \frac{c}{\omega_0 R_0}. \quad (12)$$

În cazul filtrelor din figurile 1b) și 1c), $\omega_0 = \omega_i$ și $R_0 = R_g$.

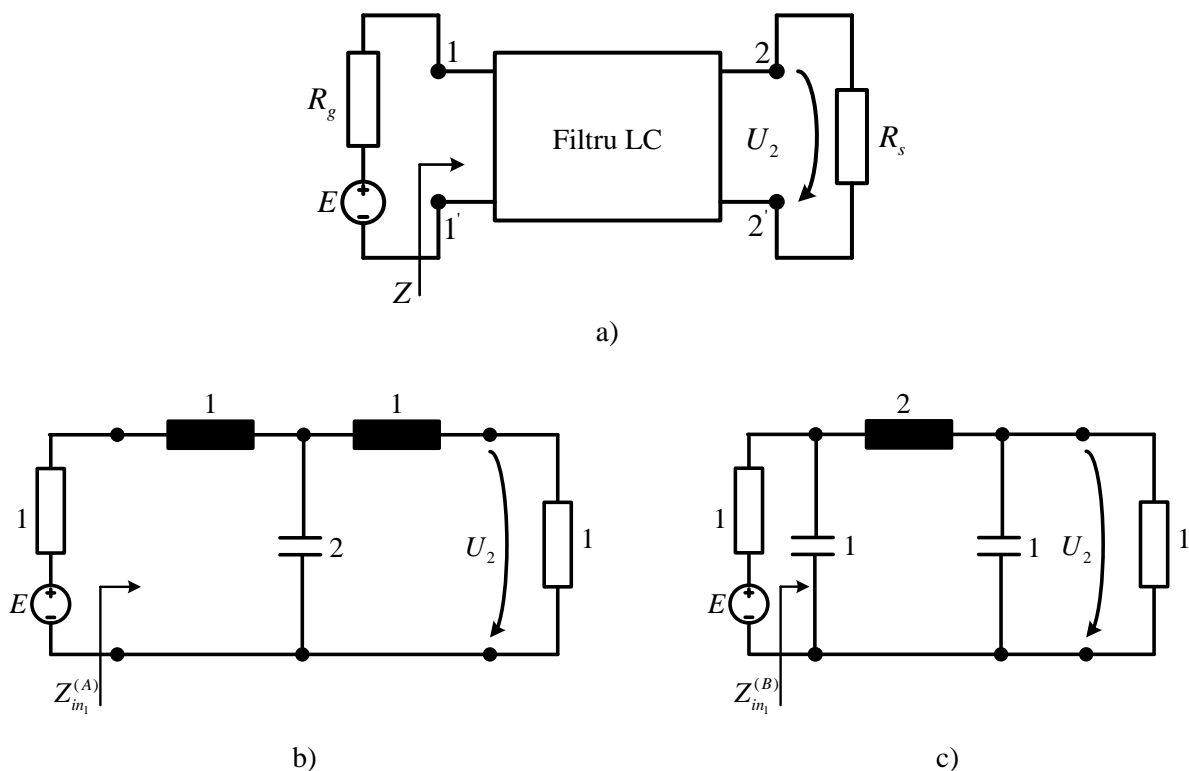


Figura 1. a) Configurația generală a unui filtru LC cu terminații rezistive. b) și c) Cele două scheme duale cu valori normate ale filtrului trece jos LC de tip Butterworth cu terminații rezistive egale.

Să considerăm și situația unui filtru trece jos de tip Butterworth de ordinul 3 cu terminațiile rezistive normate $r_g = 1$ și $r_s = 2$. Funcția de transfer $H(s_n)$ va fi:

$$H(s_n) = \frac{2U_2(s_n)}{E(s_n)} = \frac{k}{s_n^3 + 2s_n^2 + 2s_n + 1},$$

iar funcția de transfer compusă are expresia:

$$H_c(s_n) = \frac{2U_2(s_n)}{E(s_n)} \sqrt{\frac{R_g}{R_s}} = \sqrt{2}H(s_n) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1}{s_n^3 + 2s_n^2 + 2s_n + 1},$$

deoarece $H(0) = k = \frac{r_s}{r_s + r_g} = \frac{2}{3}$. Din relația (1) rezultă:

$$\begin{aligned} \rho_{in_i}(s_n)\rho_{in_i}(-s_n) &= 1 - \frac{8}{9} \frac{1}{(s_n^3 + 2s_n^2 + 2s_n + 1)(-s_n^3 + 2s_n^2 - 2s_n + 1)} = \\ &= \frac{(1 - 3s_n^3)(1 + 3s_n^3)}{9(s_n^3 + 2s_n^2 + 2s_n + 1)(-s_n^3 + 2s_n^2 - 2s_n + 1)} \end{aligned} \quad (13)$$

Se obțin patru soluții pentru coeficientul de reflexie de la intrare:

$$\rho_{in_i}^{(A)} = \frac{(1 + 3s_n^3)}{3(s_n^3 + 2s_n^2 + 2s_n + 1)}, \quad (14)$$

$$\rho_{in_i}^{(B)} = \frac{(1 - 3s_n^3)}{3(s_n^3 + 2s_n^2 + 2s_n + 1)}, \quad (15)$$

$$\rho_{in_1}^{(C)} = \frac{3s_n^3 + 2\sqrt[3]{9}s_n^2 + 2\sqrt[3]{3}s_n + 1}{3(s_n^3 + 2s_n^2 + 2s_n + 1)}, \quad (16)$$

$$\rho_{in_1}^{(D)} = \frac{-3s_n^3 + 2\sqrt[3]{9}s_n^2 - 2\sqrt[3]{3}s_n + 1}{3(s_n^3 + 2s_n^2 + 2s_n + 1)}. \quad (17)$$

Pentru primele două situații rezultă:

$$z_{in_1}^{(A)} = \frac{1 + \rho_{in_1}^{(A)}}{1 - \rho_{in_1}^{(A)}} = \frac{6s_n^3 + 6s_n^2 + 6s_n + 4}{6s_n^2 + 6s_n + 2} = s_n + \frac{1}{\frac{3}{2}s_n + \frac{1}{2s_n + 2}}, \quad (18)$$

$$z_{in_1}^{(B)} = \frac{6s_n^2 + 6s_n + 4}{6s_n^3 + 6s_n^2 + 6s_n + 2} = \frac{1}{s_n + \frac{1}{3s_n + \frac{1}{\frac{s_n}{2} + \frac{1}{2}}}}. \quad (19)$$

Schemele cu valori normate obținute pe baza relațiilor (18) și (19) sunt prezentate în figura 2.

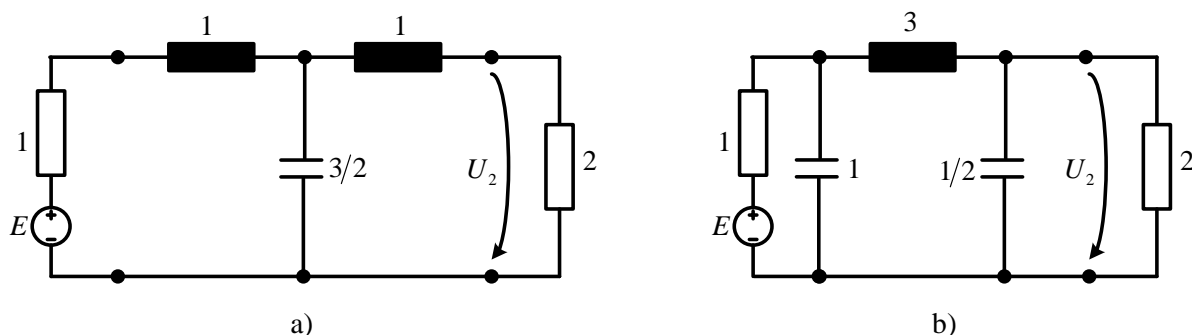


Figura 2. Două scheme duale de filtru trece jos de tip Butterworth de ordinul 3, cu valori normate și terminații rezistive normate $r_g = 1$, $r_s = 2$.

Pentru un filtru trece jos de tip Cebîșev, în banda de trecere, putem scrie:

$$|H(j\eta)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\eta)}, \quad (20)$$

unde $C_n(\eta)$ este polinomul Cebîșev de ordinul n și are expresia:

$$C_n(\eta) = \cos(n \arccos \eta), \quad \eta \leq 1.$$

Pentru calculul lui $C_n(\eta)$ pot fi folosite relațiile de recurență:

$$C_n(\eta) = 2\eta C_{n-1}(\eta) - C_{n-2}(\eta)$$

$$C_n(\eta) = 2C_n^2(\eta) - 1$$

De exemplu, în cazul $\varepsilon = \frac{1}{2}$ și $n=3$, avem:

$$|\rho(j\eta)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(4\eta^3 - 3\eta)^2} = \frac{\frac{1}{4}(4\eta^3 - 3\eta)^2}{1 + \frac{1}{4}(4\eta^3 - 3\eta)^2},$$

$$\rho_{in_1}(s_n)\rho_{in_1}(-s_n) = \left| \rho_{in_1}(j\eta) \right|^2 \Big|_{\eta^2 = -s_n^2} = \frac{\frac{1}{4}(-s_n^2)(4s_n^2 + 3)}{1 - \frac{s_n^2}{4}(4s_n^2 + 3)^2}.$$

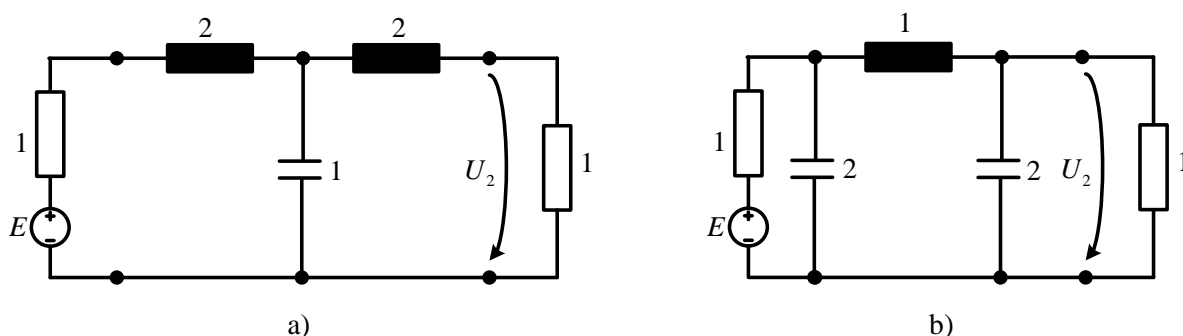


Figura 3. Scheme duale de filtre trece jos de tip Cebișev în banda de trecere cu $\varepsilon = 1/2$ și cu terminații rezistive egale.

Rezultă:

$$\left| \rho_{in_1}(s_n) \right|^2 = \frac{\pm \left(2s_n^3 + \frac{3}{2}s_n \right)}{2s_n^3 + 2s_n^2 + \frac{5s_n}{2} + 1}, \quad (21)$$

$$z_{in_1}^{(A)} = \frac{1 + \eta_{in_1}^{(A)}}{1 - \eta_{in_1}^{(A)}} = \frac{4s_n^3 + 2s_n^2 + 4s_n + 1}{2s_n^2 + s_n + 1} = 2s_n + \frac{1}{s_n + \frac{1}{2s_n + 1}}, \quad (22)$$

$$z_{in_1}^{(B)} = \frac{1}{z_{in_1}^{(A)}} = \frac{1}{2s_n + \frac{1}{s_n + \frac{1}{2s_n + 1}}}. \quad (23)$$

Cele două scheme duale cu valori normate ale filtrelor trece jos de tip Cebișev în banda de trecere cu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ sunt reprezentate în figura 3.

Filtrele LC de tip trece sus, trece bandă sau oprește bandă pot fi obținute din cele de tip trece jos prin transformări de frecvență sau de reactanță. Trecerea de la tipul trece jos la tipul trece sus se face conform relației:

$$s_{nj} = \frac{1}{s_{ns}}. \quad (24)$$

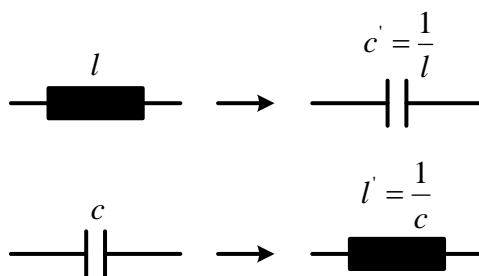


Figura 4. Transformările elementelor de circuit în cazul transformării de frecvență de la tipul trece jos, la tipul trece sus.

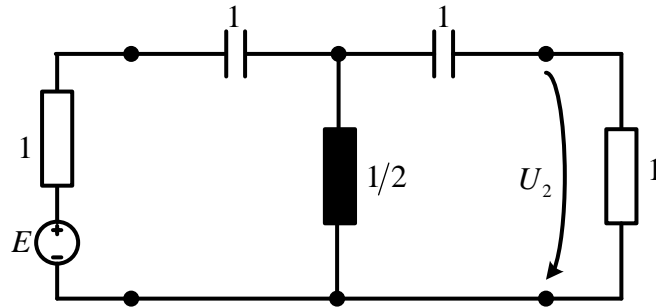


Figura 5. Schema de filtru trece sus obținută prin transformarea de frecvență a schemei din figura 1b).

Transformările elementelor de circuit în acest caz sunt prezentate în figura 4. În figura 5 este arătată schema de filtru trece sus rezultată prin transformarea schemei din figura 1b).

Transformarea de frecvență pentru trecerea de la o schemă de tip trece jos la una de tip trece bandă este conform relației:

$$s_{nj} = \frac{s_{nB}^2 + 1}{\delta s_{nB}} \tag{25}$$

În relația (25), $\delta = \frac{B}{f_c}$ este banda de frecvență de trecere normată a filtrului trece bandă, f_c fiind frecvența centrală din banda de trecere a filtrului trece bandă. Folosind relația (25) rezultă transformările elementelor de circuit din figura 6.

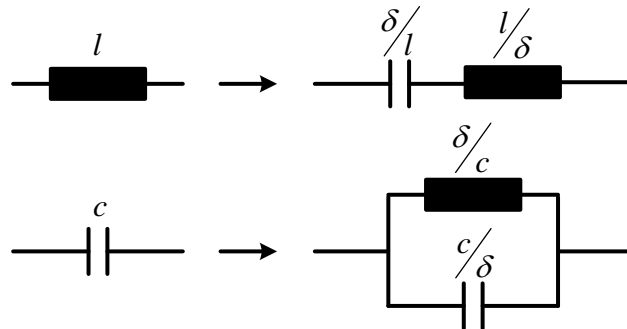


Figura 6. Transformările elementelor de circuit în cazul transformării de frecvență de la tipul trece jos, la tipul trece bandă.

Schema filtrului trece bandă, obținută prin transformarea schemei de filtru trece jos din figura 1c), este prezentată în figura 7.

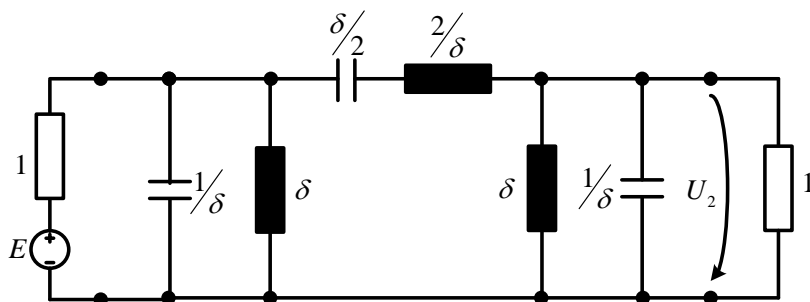


Figura 7. Filtrul trece bandă obținut prin transformarea de frecvență a filtrului din figura 1c).

Transformarea de frecvență pentru trecerea de la o schemă de tip trece sus, la o schemă de tip oprește bandă este:

$$S_{ns} = \frac{s_{OB}^2 + 1}{\delta s_{OB}} \quad (26)$$

În relația (26), $\delta = \frac{B}{f_c}$ este banda de oprire normalată a filtrului oprește bandă, f_c fiind frecvența centrală din banda de blocare a filtrului oprește bandă. Folosind relația (26) transformările elementelor de circuit sunt cele din figura 6, aceste transformări fiind operate acum în schema filtrului trece sus. Schema filtrului oprește banda obținută prin transformarea filtrului trece sus din figura 5 este dată în figura 8.

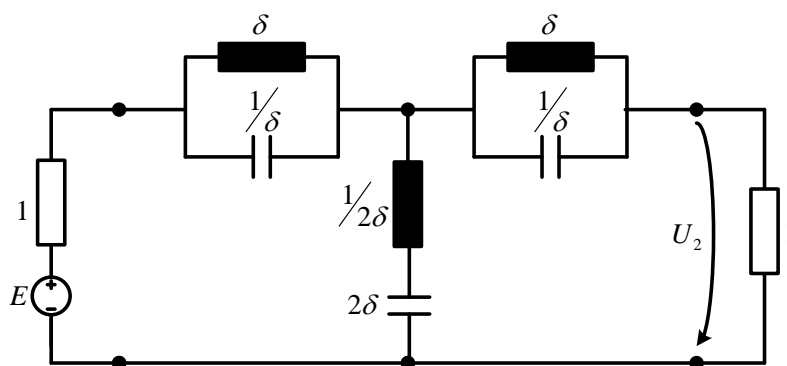


Figura 8. Filtrul oprește bandă obținut prin transformarea de frecvență a filtrului din figura 5.

3. Desfășurarea lucrării

Schema pentru măsurarea caracteristicilor amplitudine–frecvență a filtrelor din lucrare este dată în figura 9.

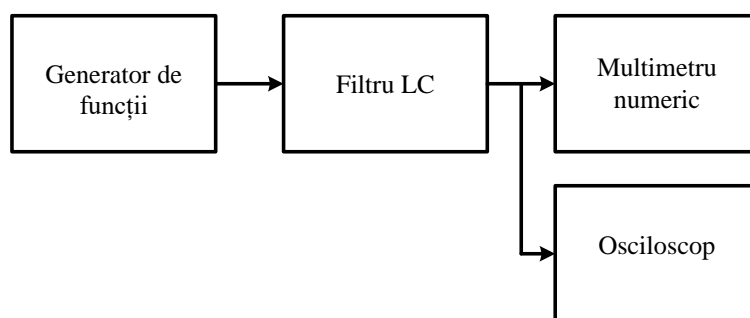


Figura 9. Schema de măsură folosită în lucrare

Se vor identifica cele două machete: una conținând 4 filtre (3 de tip trece-jos și unul de tip trece-sus), iar cealaltă conținând alte 2 filtre (un filtru trece-bandă și un filtru oprește-bandă). Prima machetă conține un comutator rotativ K_0 și altul cu două poziții notat K_1 . A doua placă conține numai un comutator cu două poziții care permite selectarea unui filtru din cele două amintite mai sus.

A) Se ridică caracteristica amplitudine-frecvență a filtrului LC din figura 1c), rezistențele terminale fiind $R_g = R_s = R_0 = 600 \Omega$. Se folosește macheta cu 4 filtre. Se trece comutatorul K_0 în poziția 1 și comutatorul K_1 în poziția FTJ. Se folosește ca semnal de intrare un semnal sinusoidal cu tensiunea efectivă $E=2V$. Această tensiune se măsorează cu generatorul în gol. Se completează tabelul 1. Acest tip de măsurătoare a fost deja studiat în lucrarea „Filtre RC active”. U_2 reprezintă tensiunea ce se va măsura la ieșirea filtrului.

Tabelul 1

f [kHz]	
U_2 [V]	
$ H_c(f) = \frac{2U_2}{E} \sqrt{\frac{R_g}{R_s}}$	

Se reprezintă grafic $|H_c(jf)|$ funcție de frecvență f , măsurată în kHz. Se citește din grafic frecvența de tăiere a filtrului f_t [kHz] la -3 dB, adică frecvența la care amplitudinea scade la

$$\frac{|H_c(jf_{\min})|}{\sqrt{2}}, \text{ unde } f_{\min} \text{ este cea mai joasă frecvență la care s-a măsurat și } H_c(f) = \frac{2U_2}{E} \sqrt{\frac{R_g}{R_s}}.$$

B) Se calculează elementele denormate ale schemei din figura 1c) folosind relațiile (10)-(12), considerând $\omega_0 = \omega_t = 2\pi f_t$, cu f_t fiind notată frecvența de tăiere a filtrului.

C) Se măsoară caracteristica fază-frecvență a filtrului din figura 1c), folosind metoda sincronizării pentru un osciloscop cu două canale. Se măsoară timpul de întârziere t_0 , între semnalul aplicat la intrarea filtrului și semnalul de la ieșirea filtrului, la diverse frecvențe. Faza se calculează cu relația:

$$\varphi(f) = -360 \frac{t_0}{T} = -360 t_0 f_0, \quad (27)$$

unde T este perioada semnalului sinusoidal aplicat la intrarea filtrului.

Se vizualizează pe osciloscop simultan atât semnalul de intrare cât și cel de ieșire. Pe ecran ar trebui să apară o imagine similară cu cea de mai jos în care $x(t)$ este semnalul de intrare, iar $y(t)$ este semnalul de ieșire. Se poate observa t_0 , mărimea de măsurat. Se completează tabelul 2.

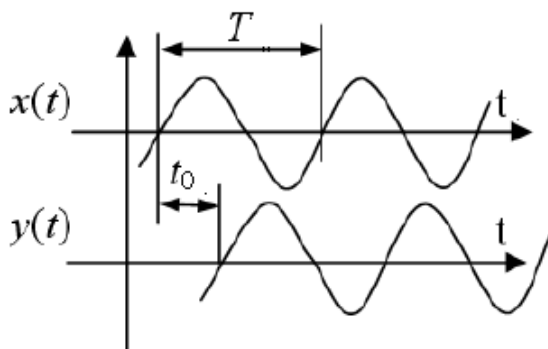


Figura 10. Măsurarea defazajului prin metoda sincronizării pentru un osciloscop cu două canale.

Tabelul 2

f [kHz]	
t_0	
φ [grade]	
φ_t [grade]	

În tabelul 2, φ_t este faza teoretică care se calculează cu relația:

$$\phi_t(f) = -\arctg \frac{2\frac{f}{f_t} - \frac{f^3}{f_t^3}}{1 - 2\frac{f^2}{f_t^2}}. \quad (28)$$

Se trasează pe aceleași axe de coordonate graficele $\phi(f)$ și $\phi_t(f)$.

D) Se măsoară caracteristica amplitudine–frecvență a filtrului Butterworth de ordinul 3 din figura 2b), având $R_g = 600 \Omega$ și $R_y = 1200 \Omega$. Se folosește macheta cu 4 filtre. Se trece comutatorul K_0 în poziția 2 și comutatorul K_1 în poziția FTJ. Se fixează tensiunea măsurată în gol la generator $E=2V$. Se completează un tabel similar cu tabelul 1. Se reprezintă grafic $|H_c(jf)|$ funcție de frecvența f măsurată în kHz. Se citește din grafic frecvența de tăiere f_t [kHz], măsurată la -3 dB, adică frecvența la care amplitudinea este $\frac{|H_c(jf_{\min})|}{\sqrt{2}}$.

E) Se calculează elementele denormate ale schemei din figura 2b), folosind relațiile (10)-(12), considerând $R_0 = R_g$ și $\omega_0 = \omega_t = 2\pi f_t$.

F) Se măsoară caracteristica fază-frecvență a filtrului din figura 2b), procedând ca la punctul C) și se completează un tabel similar cu tabelul 2. Faza teoretică ϕ_t se calculează cu relația (28). Se trasează pe aceleași axe de coordonate graficele $\phi(f)$ și $\phi_t(f)$, pentru filtrul din figura 2b).

G) Se repetă punctul A) pentru filtrul trece jos de tip Cebîșev în banda de trecere din figura 3b). Se folosește macheta cu 4 filtre. Se trece comutatorul K_0 în poziția 3 și comutatorul K_1 în poziția FTJ. Se citește din graficul $|H_c(jf)|$ frecvența f_t [kHz], care este frecvența limită de sus a benzii în sens Cebîșev (similar cu cazul întâlnit în lucrarea „Amplificator cu circuite cuplate”) a filtrului.

H) Se repetă punctul B) pentru filtrul din figura 3b).

I) Se repetă punctul C) pentru filtrul din figura 3b). Se calculează $H_c(s)$ pentru filtrul din figura 3b) și se deduce $\phi_t(f) = \arg H_c(jf)$, pentru a completa în tabelul 2.

J) Se repetă punctul A) pentru filtrul trece sus de tip Butterworth din figura 5. Se folosește macheta cu 4 filtre. Se trece comutatorul K_0 în poziția 4 și comutatorul K_1 în poziția FTS. Se citește din grafic frecvența de tăiere a filtrului f_t [kHz] la -3 dB, adică frecvența la care amplitudinea scade la $\frac{|H_c(jf_\infty)|}{\sqrt{2}}$, unde $f_\infty = 100$ kHz.

K) Se calculează elementele denormate ale schemei din figura 5, folosind relațiile (10)-(12), considerând $R_g = R_0 = 600 \Omega$ și $\omega_0 = \omega_t = 2\pi f_t$.

L) Se repetă punctul C) pentru filtrul din figura 5. Se calculează $H_c(s)$ pentru filtrul din figura 5 și se deduce $\phi_t(f) = \arg H_c(f)$, pentru a completa în tabelul 2.

M) Se repetă punctul A) pentru filtrele din figurile 7 și 8. Se folosește macheta cu 2 filtre. Se citește din grafice frecvența centrală f_c a benzii de trecere și banda de trecere la -3 dB pentru filtrul trece bandă din figura 7 și respectiv frecvența centrală a benzii de oprire și banda de oprire la 3 dB, pentru filtrul din figura 8.

N) Se calculează elementele denormate ale schemelor din figurile 7 și 8, folosind relațiile (10)-(12), considerând $\omega_0 = \omega_c = 2\pi f_c$ și $\delta = \frac{B}{f_c}$.

O) Pentru fiecare din filtrele din figurile 1c), 2b) și 3b) se reprezintă grafic, pe aceleași axe de coordonate $|H_c(j\eta)|$ și $|H_{ct}(j\eta)|$, unde $\eta = \frac{f}{f_t}$ și $|H_{ct}(j\eta)|$ este caracteristica amplitudine-frecvență a funcției de transfer compuse teoretice.

4. Întrebări

- A) De ce la punctul J) $f_\infty = 100$ kHz și nu $f_\infty = \infty$?
- B) De ce sunt mai ușor de realizat experimental schemele din figurile 1c), 2b) și 3b), față de cele din figurile 1b), 2a) și respectiv 3a).
- C) De ce s-a preferat la filtrul trece sus din figura 5 o schemă în T și nu una în π ?
- D) Cum se poate obține schema duală a unei scheme date?
- E) În ce situații se preferă să se lucreze cu parametrii de lucru pentru un diport și nu cu parametrii imagine?
- F) Care sunt avantajele și dezavantajele filtrelor LC în comparație cu filtrele active RC?
- G) Ce se poate constata dacă se compară două filtre trece jos de tip Butterworth și respectiv, de tip Cebîșev de același ordin și aceeași frecvență de tăiere?

5. Aplicații

- A) Să se găsească schemele cu valori normate de filtru trece jos de tip Butterworth de ordinul 2, cu terminații rezistive normate $r_g = r_s = 1$.
- B) Pentru filtrele de la a) să se găsească corespondentele lor de tip trece sus, obținute prin transformări de frecvență.
- C) Pentru filtrele de la a) și b) să se reprezinte grafic caracteristicile de fază funcție de frecvență normalată.
- D) Folosind filtrele de la punctul a) să se găsească filtrele de tip trece bandă și oprește bandă, cu banda normalată de trecere, respectiv de blocare δ .
- E) Să se reprezinte grafic pentru frecvențe pozitive, $C_n(\eta)$ și $|H(j\eta)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\eta)}}$, pentru

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \text{ și } n=2,3.$$