

## FILTRE RC ACTIVE

### 1. Obiectul lucrării

Se studiază răspunsul în frecvență al filtrelor trece jos și trece sus realizate cu amplificatoare operaționale, rezistoare și condensatoare. Se studiază pentru cazul particular al unui FTJ Butterworth de ordinul 2 sensibilitatea acestuia la variația valorilor unor parametri.

### 2. Aspecte teoretice

Filtrele RC active prezintă, în comparație cu filtrele LC, câteva avantaje importante și anume:

- a) permit realizarea oricărei funcții de transfer, care îndeplinește următoarele condiții:
  1. este exprimată prin funcția rațională:  $T(s) = P(s)/Q(s)$ ;
  2. este reală pentru "s" real;
  3. este analitică în semiplanul drept al variabilei complexe "s";
- b) elimină inductanțele (elemente scumpe și cu gabarit mare);
- c) reglajul parametrilor se face ușor;
- d) permit realizarea circuitelor selective cu parametri variabili (ex. filtre universale);
- e) elimină dificila problemă a adaptării ce apare la filtrele LC.

Realizarea unei funcții de transfer de orice tip (trecere jos, trecere sus, trecere bandă) de ordin (grad) superior se bazează pe descompunerea ei în produs de funcții de transfer de ordin II. Problema dificilă a adaptării, care apare la filtrele pasive, este eliminată aici datorită faptului că amplificatorul operațional prezintă  $Z_{in} \cong \infty$ ,  $Z_{ieş} \cong 0$  și deci fiecare celulă de ordin II reprezintă pentru celula următoare un generator ideal de tensiune.

În lucrare se realizează și un filtru trece jos Butterworth de ordinul IV. Funcția de transfer normalizată a acestuia este:

$$T(s_n) = \frac{H}{B_{W_4}(s_n)} \quad (1)$$

unde  $B_{W_4}$  reprezintă polinomul Butterworth de ordinul 4.

$$B_{W_4} = s_n^4 + 2,613126s_n^3 + 3,414214s_n^2 + 2,613126s_n + 1$$

având zerourile:

$$s_{1,2} = -0,3827 \pm j0,924;$$

$$s_{3,4} = -0,924 \pm j0,3827.$$

Funcția  $T(s_n)$  se factorizează în forma:

$$T(s_n) = T_1(s_n)T_2(s_n) = \frac{H}{(s_n^2 + 0,7654s_n + 1)(s_n^2 + 1,848s_n + 1)} \quad (2)$$

Folosind celule de ordinul II, având schema electrică din figura 1.

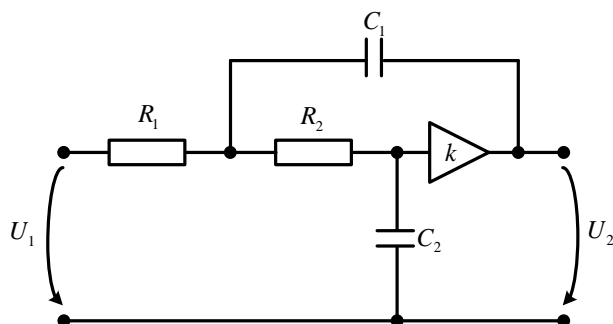


Figura 1

și funcția de transfer:

$$T_1(s_n) = \frac{k \frac{G^2}{C^2}}{s^2 + s \frac{G}{C} (3 - k) + \frac{G^2}{C^2}} \text{ pentru } \begin{cases} R_1 = R_2 = R \\ C_1 = C_2 = C \end{cases} \quad (3)$$

Făcând normarea frecvențelor în raport cu  $\omega_n = \frac{G}{C} = \frac{1}{RC}$ , se obține:

$$T_1(s_n) = \frac{k}{s_n^2 + s_n(3 - k) + 1} \quad (4)$$

și identificând fiecare funcție de transfer de ordinul II, din relația (2) cu  $T_1(s_n)$ , dat de (4) rezultă:

$$k_1 = 3 - 0,7654 = 2,2346,$$

$$k_2 = 3 - 1,848 = 1,152, \text{ deci}$$

$$H = k_1 k_2 = 2,574.$$

Așadar filtrul dorit se obține prin conectarea în cascadă a două celule trece jos la care diferă doar rezistențele de reacție  $R_b$  din figura 2.

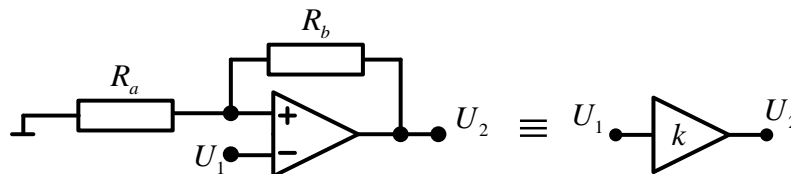


Figura 2

Definim *senzitivitatea* în sens clasic a funcției  $T$  la variația valorii unui parametru "x" cu relația:

$$S_x^T = \frac{d(\ln T)}{d(\ln x)} = \frac{x dT}{T dx} \quad (5)$$

Atenuarea de inserție a unui cuadripol (diport) este definită prin relația:

$$a_i = 10 \lg \left| \frac{U_{0s} I_{0s}}{U_2 I_2} \right| \quad (6)$$

unde  $U_{0s}$ ,  $I_{0s}$ ,  $U_2$ ,  $I_2$  sunt mărimile electrice din figura 3.

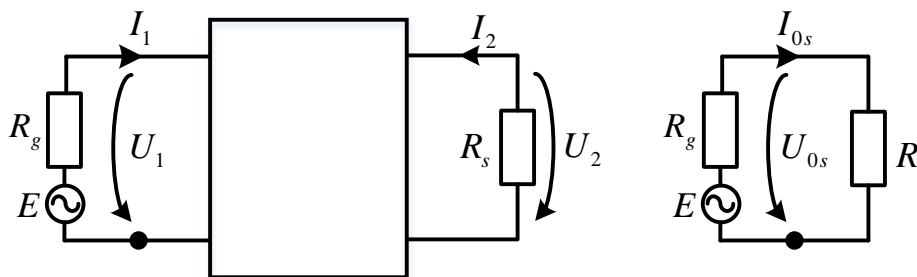


Figura 3

Introducând  $U_2 = I_2 R_s$  și  $U_{0s} = I_{0s} R_s$  în (6) se obține:

$$a_i = 10 \lg \left| \frac{U_{0s}}{U_2} \right| = n_{0s} - n_2 \quad (7)$$

Schemele celulelor de filtrare studiate și funcțiile de transfer corespunzătoare sunt date în tabelul 1.

Tabelul 1

Tipul filtrului	Schema electrică a circuitului	Funcția de transfer
<b>FTJBw2</b>		$T(s_n) = \frac{H}{s_n^2 + 1,41s_n + 1}$ $H = 1,59$
<b>FTSBw2 (FTS1)</b>		$T(s_n) = \frac{Hs_n^2}{s_n^2 + 1,41s_n + 1}$ $H = 1,59$
<b>FTJ3</b>		$T(s_n) = \frac{H(s_n^2 + 2)}{s_n^2 + s_n + 1}$ $H = 0,461$
<b>FTS2</b>		$T(s_n) = \frac{H(s_n^2 + 0,5)}{s_n^2 + s_n + 1}$ $H = 0,585$

Machetele de laborator au configurația dată de figura 4.

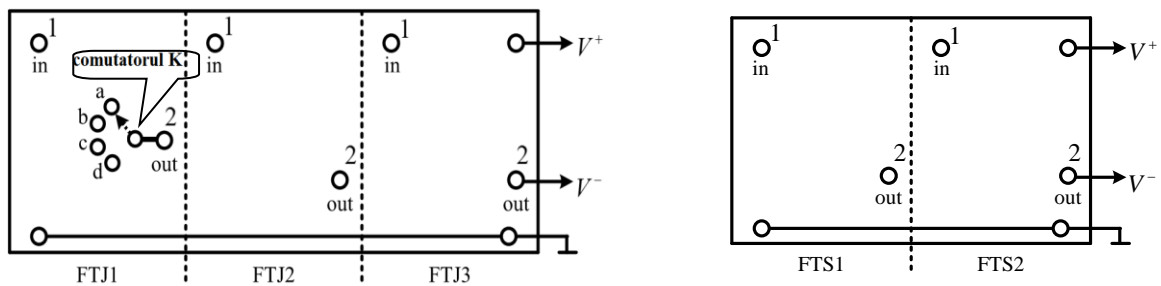


Figura 4

Comutatorul K schimbă parametrii celulei FTJ1 astfel pentru poziția:

- Filtre Butterworth de ordin II.
- Filtre Butterworth de ordin II cu  $\Delta k/k = 10\%$ .
- Celulă de ordinul II adusă în regim de oscilație.
- Celula 1 dintr-un filtru Butterworth de ordinul IV.

Comutatorul K este un fir care face legătura între o bornă comună cu ieșirea (aflată imediat în stânga bornei de ieșire marcată cu 2) și bornele a, b, respectiv d, în funcție de configurația necesară la punctul respectiv al lucrării. În figura 4 acest fir este reprezentat cu o săgeată cu linie punctată. A nu se confunda cu „k”, notație pentru câștigul amplificatoarelor care fac parte din filtre.

### 3. Desfășurarea lucrării

A) Se calculează frecvențele polilor de atenuare pentru celulele FTJ3 și FTS2 ( $f_{\infty j}$  și  $f_{\infty s}$ ). Pentru aceasta se determină zerourile următoarelor funcții de transfer:

$$T_{FTJ3}(s_n) = \frac{0,461(s_n^2 + 2)}{s_n^2 + s_n + 1} \quad (8)$$

$$T_{FTS2}(s_n) = \frac{0,585(s_n^2 + 0,5)}{s_n^2 + s_n + 1} \quad (9)$$

unde:

$$s_n = \frac{s}{\omega_n}, s = j\omega \quad \omega_n = 2\pi f_n, \omega = 2\pi f \quad f_n = 4000\text{Hz} - \text{frecvența de normare.}$$

B) Se vor calcula atenuările de inserție pentru filtrele trece jos Butterworth de ordinul 2 și de ordinul 4, pentru filtrele FTJ3, FTS1 (filtru trece sus Butterworth de ordinul 2) și FTS2 la frecvențele indicate în tabelul 2 conform instrucțiunilor descrise sub tabel.

Tabelul 2

	$f$ [kHz]	0	2	$f_{\infty j}$	4	$f_{\infty s}$	6	8	10
Bw2	$a_i$ [dB]								
Bw4	$a_i$ [dB]								
FTJ3	$a_i$ [dB]								
FTS2	$a_i$ [dB]								
FTS1	$a_i$ [dB]								

Se folosesc relațiile:

$$a_i = 20 \lg \left| \frac{U_1}{U_2} \right| = 20 \lg \left| \frac{1}{T(j\eta)} \right|, \quad \eta = \frac{f}{f_n} \quad (10)$$

Pentru filtrele trece jos de tip Butterworth:

$$|T(j\eta)| = \frac{H_n}{(1 + \eta^{2n})^{1/2}}, \quad n - \text{ordinul filtrului} \quad (11)$$

$$H_2 = 1,59, \quad H_4 = 2,574, \quad n = (2, \dots, \dots).$$

Pentru filtrele notate Bw2, FTJ3, FTS2,  $T(j\eta)$  rezultă din relațiile prezentate în tabelul 1, înlocuind  $s_n = j\eta$ . Pentru filtrul Bw4 se vor folosi în ordine relațiile (11) și (10). Pentru filtrul trece sus FTS1 se va folosi relația (11) pentru  $n = 2$  înlocuind  $\eta = 1/\eta$ , iar apoi relația (10).

C) Se determină sensibilitatea atenuării FTJ Butterworth de ordinul 2 la variația cu (aproximativ) 10% a rezistenței  $R_1$  (vezi figura 1) la frecvențele din tabelul de mai jos. Concret, valoarea rezistenței  $R_1$  pentru acest filtru este egală cu 6,8 k $\Omega$  în implementarea din laborator, așa cum se poate observa din prima schema din tabelul 1. O variație de 10% înseamnă o variație cu 680  $\Omega$ . Așadar într-un prim caz se va conecta generatorul de semnal direct la filtru, iar în al doilea caz se va introduce o rezistență adițională serie între generator și filtrul studiat care va determina modificarea schemei în sensul creșterii valorii rezistenței  $R_1$  cu circa 10%. Rezistența adițională este deja montată pe placă, iar introducerea acesteia în circuit se face prin conectarea generatorului la borna marcată „600”. Metoda de măsurare se găsește mai jos.

### Despre câștig și atenuare:

Câștigul unui circuit la o anumită frecvență de măsură  $f_m$  (notat  $g(f_m)$ ) este egal cu raportul dintre tensiunea de ieșire și tensiunea de intrare și se determină folosind **semnal sinusoidal** (vezi metoda armonică de determinare a răspunsului circuitelor – curs/seminar ASC). Se observă că astfel se măsoară  $|H(f_m)|$ . Se poate scrie:

$$g = |H(f_m)| = \frac{U_2}{U_1} \Big|_{\substack{\text{semnale sinusoidale} \\ \text{cu frecvența } f_m}} \quad (12)$$

unde  $U_2$  este tensiunea de la ieșirea circuitului, iar  $U_1$  este tensiunea de la intrarea sa. Pentru forma de undă cu care se lucrează (sinusoidală)  $U$  poate fi amplitudine, amplitudine vârf-la-vârf sau valoare efectivă (vezi curs/laborator METc). Câștigul calculat astfel este o mărime adimensională. Acesta este exprimat în majoritatea cazurilor folosind unități de nivel (dB). Explicarea câștigului la o anumită frecvență în dB se face în felul următor:

$$g[dB] = 20 \cdot \lg(g) = 20 \cdot \lg(|H(f_m)|) = 20 \cdot \lg\left(\frac{U_2}{U_1}\right) \quad (13)$$

Voltmetrul din laborator poate măsura valoarea efectivă a tensiunii afișând-o direct în dBV sau dBm (vezi curs/laborator METc). Așadar se pot măsura  $U_1$  și  $U_2$  exprimate direct în dBV sau dBm. Atunci, deoarece logaritmul unui raport este egal cu diferența dintre logaritmul deîmpărțitului și logaritmul împărțitorului, câștigul exprimat în dB va fi:

$$g[dB] = U_2|_{dBV \text{ sau } dBm} - U_1|_{dBV \text{ sau } dBm} \quad (14)$$

Știind că atenuarea este inversul câștigului, rezultă imediat:

$$a[dB] = U_1|_{dBV \text{ sau } dBm} - U_2|_{dBV \text{ sau } dBm} \quad (15)$$

Tensiunea  $U_1$  fiind la dispoziția utilizatorului (este tensiunea de intrare, obținută cu ajutorul generatorului de semnal), ea poate fi reglată la o valoare convenabilă. Dacă aceasta se reglează la 0 dBm sau 0 dBV (depinde de unități de nivel calculează și afișează voltmetrul numeric) atunci, conform relației (15) atenuarea va fi egală cu  $a[dB] = -U_2|_{dBV \text{ sau } dBm}$ , deci se poate determina măsurând numai tensiunea de ieșire (în unități de nivel) și schimbând semnul valorii măsurate (afișate).

### Metodă de măsurare:

Se identifică placa ilustrată în partea stângă a figurii 4 și se alimentează conectând la aceasta firul alb terminat cu mufa XLR (3 pini).

Se trece multimetrul în modul de măsurare de tensiuni alternative (se apasă butonul ACV). Se activează afișarea tensiunii în unități de nivel (se apasă SHIFT, iar apoi se apasă butonul deasupra căruia scrie dBm. Se constată că se activează al doilea afișaj – cel din partea stângă a aparatului – pe care se poate citi tensiunea efectivă exprimată în dBV sau dBm. Așadar tensiunea de referință se poate schimba, însă acest lucru nu este important pentru experimentul de față – detalii: laborator METc/IEM).

Se conectează generatorul la filtrul FTJ1 la intrarea corespunzătoare unei rezistențe  $R_1 = 6,8 \text{ k}\Omega + 50 \Omega$  (direct la filtru – intrarea marcată „50”).  $U_1$  se fixează convenabil, după conectarea la filtru, la  $U_1 = 0,775 \text{ V}$  sau la  $U_1 = 1 \text{ V}$  astfel încât  $U_1 = 0 \text{ dBm}$  sau, respectiv,  $U_1 = 0 \text{ dBV}$  (pe afișajul din partea stângă a multimetrului să se poată citi 0.00). Forma de undă trebuie să fie sinusoidală (verificați DUTY=50, altfel forma de undă generată va fi distorsionată) comutatorul  $K$  trebuie să fie pe poziția „a”. Se măsoară conform indicațiilor de mai sus tensiunea de ieșire ( $U_2$ ) și

atenuarea filtrului ( $a_i$ ) la frecvențele indicate în tabelul 3. Deoarece generatorul a fost conectat direct la filtru, este clar că,  $R_g = 50\Omega$  în acest caz.

Pentru al doilea caz se conectează generatorul la intrarea corespunzătoare unei rezistențe  $R_1 = 6,8 k\Omega + 600 \Omega$  (intrarea marcată „600”). Singura modificare față de situația de mai sus este introducerea unei rezistențe de  $550 \Omega$  între generator și filtru. Se observă că între cele două cazuri  $R_1$  a variat cu aproximativ 10%. Se măsoară și în acest nou caz tensiunea de ieșire și atenuarea filtrului, notând rezultatele în tabelul 3, pe linia corespunzătoare lui  $R_g = 600\Omega$ .

Tabelul 3

$R_g$ [ $\Omega$ ]	$f$ [kHz]	0,5	1	2	3	3,5	4	4,5	5	6	8	10	11
50	$U_2$ [V]												
	$a_i$ [dB]												
600	$U_2$ [V]												
	$a_i$ [dB]												
	$S_{R_1}^a$												

Senzitivitatea la variația rezistenței  $R_1$  se calculează cu formula:

$$S_{R_1}^a = \frac{\frac{\Delta a}{a}}{\frac{\Delta R_1}{R_1}} \quad \text{unde} \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{a_i[\text{dB}]|_{R_g=600\Omega} - a_i[\text{dB}]|_{R_g=50\Omega}}{a_i[\text{dB}]|_{R_g=50\Omega}} \quad (16)$$

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{R_1|_{R_g=600\Omega} - R_1|_{R_g=50\Omega}}{R_1|_{R_g=50\Omega}}$$

D) Se determină sensibilitatea atenuării FTJ Butterworth de ordinul 2 pentru o variație a câștigului amplificatorului din configurația prezentată în prima schemă din tabelul 1 cu  $\Delta k/k = 10\%$  (comutatorul K pe poziția „b”). Se completează tabelul 4.

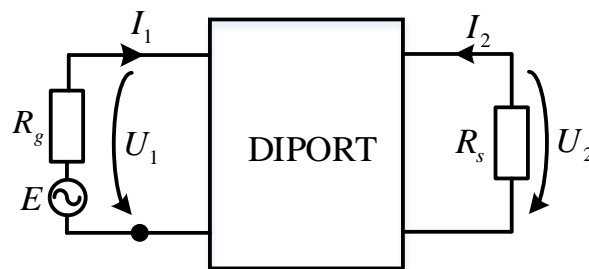


Figura 5

$U_1$  se fixează ca la punctul anterior (C), iar intrarea folosită este cea corespunzătoare unei valori  $R_g = 50 \Omega$  (intrarea marcată „50”).

Tabelul 4

$R_g$ [ $\Omega$ ]	$f$ [kHz]	0,5	1	2	3	3,5	4	4,5	5	6	8	10	11
50	$U_2$ [V]												
	$a_i$ [dB]												
	$S_k^a$												

$$S_{R_1}^a = \frac{\frac{\Delta a}{a}}{\frac{\Delta k}{k}} \quad \text{unde} \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{a_i[\text{dB}]|_{\text{Tabelul 4}} - a_i[\text{dB}]|_{\text{Tabelul 3, } R_g=50\Omega}}{a_i[\text{dB}]|_{\text{Tabelul 3, } R_g=50\Omega}} \quad (17)$$

$$\frac{\Delta k}{k} = 10\%.$$

E) Se reprezintă grafic variația atenuării în cele trei situații. Concluzii.

F) Se măsoară atenuările filtrelor FTJ3, FTJ Butterworth de ordinul 4 (format din FTJ1 cu comutatorul pe poziția "d" cascadat cu FTJ2) și filtrul compus FCTJ (format din FTJ1 cu comutatorul K pe poziția "a" cascadat cu FTJ3). Cascadarea a două sau mai multe sisteme înseamnă obținerea unui sistem echivalent prin înlănțuirea sistemelor care îl alcătuiesc după cum urmează: intrarea primului sistem va reprezenta intrarea în sistemul echivalent, ieșirea primului sistem se va conecta la intrarea celui de-al doilea și așa mai departe. Ieșirea ultimului sistem va reprezenta ieșirea sistemului echivalent. Mai multe informații se pot găsi în cursul de „Semnale și sisteme”. Tot de acolo se cunoaște deja faptul că funcția de transfer a sistemului echivalent va fi egală cu produsul funcțiilor de transfer ale sistemelor care îl alcătuiesc. Rezultatele se trec în tabelul 5.

Tabelul 5  $R_g = 50 \Omega$

	$f$ [kHz]	0.5	1	2	3	3,5	4	4,5	5	$f_{\infty j}$	6	8	10	11
FTJ3	$U_2$ [V]													
	$a_i$ [dB]													
Bw4	$U_2$ [V]													
	$a_i$ [dB]													
FCTJ	$U_2$ [V]													
	$a_i$ [dB]													

Se determină panta caracteristicii de atenuare  $\Delta a/\Delta f$  pe octava 5-10 kHz ale filtrului Butterworth de ordinul 4 și se compară cu panta pe octavă stabilită teoretic:  $6n$  dB/octavă unde  $n$  este ordinul filtrului. La frecvențele din tabelul 2 se compară rezultatele experimentale cu cele teoretice. Se reprezintă pe același grafic cele trei caracteristici măsurate și caracteristica filtrului FTJ1 (Bw2) din tabelul 3 ( $R_g = 50 \Omega$ ).

G) Se identifică placa ilustrată în partea stângă a figurii 4 și se alimentează conectând la aceasta firul alb terminat cu mufa XLR (3 pini). Se măsoară atenuările filtrelor FTS1 și FTS2 la frecvențele indicate în tabelul 6.

Tabelul 6  $R_g = 50 \Omega$

	$f$ [kHz]	0,5	1	2	$f_{\infty s}$	3	4	5	6	8	10	11
FTS1	$U_2$ [V]											
	$a_i$ [dB]											
FTS2	$U_2$ [V]											
	$a_i$ [dB]											

Se compară rezultatele experimentale cu cele teoretice (calculate la punctul B) și se reprezintă grafic cele măsurate.

#### 4. Întrebări

- A. Cum se explică independența atenuării cu  $R_g$ ?
- B. De ce sensibilitatea atenuării la variația cu  $R_1$  s-a putut determina prin modificarea rezistenței generatorului?
- C. Cum explicați limitarea domeniului de frecvențe în care pot fi realizate filtrele RC active cu amplificatoare operaționale?
- D. Pentru determinarea atenuării de inserție în cadrul lucrării s-a măsurat  $U_1$  și nu  $U_{0s}$  (vezi figura 3). De ce?
- E. Prezentați comparativ avantajele și dezavantajele celulelor FTJ de ordinul II cu polul de atenuare la infinit și cu polul de atenuare finit.
- F. Cum realizați un filtru trece bandă folosind celule de ordinul II? Explicați grafic realizarea FTB.
- G. Știind că în figura 2,  $R_a = 2 \text{ k}\Omega$  să se determine valorile rezistențelor de reacție  $R_b$  necesare realizării FTBw4.

#### 5. Aplicații

- A. Se consideră filtrul RC activ rezultat prin montarea în cascadă a filtrelor cu pol de atenuare trece sus și trece jos (FTS2 și FTJ3). Să se măsoare și să se reprezinte grafic variația atenuării de inserție  $a_i = f(f)$ ,  $f = 0,5 \dots 10 \text{ kHz}$ . Să se verifice valorile obținute la frecvențele  $f_1 = 2 \text{ kHz}$  și  $f_2 = 8 \text{ kHz}$ .
- B. Se consideră filtrul RC activ rezultat prin montarea în cascadă a filtrelor Bw2 trece sus și trece jos. Să se măsoare variația atenuării de inserție  $a_i = f(f)$ ,  $f = 0,5 \dots 10 \text{ kHz}$ . Să se verifice valorile obținute la frecvențele  $f_1 = 2 \text{ kHz}$  și  $f_2 = 8 \text{ kHz}$ .
- C. Se consideră un filtru activ RC dat prin funcția:

$$T(s_n) = \frac{H(s_n^2 + 0,6)}{s_n^2 + s_n + 1}$$

Să se determine atenuarea de inserție la frecvențele  $f_1 = 5 \text{ kHz}$  și  $f_2 = 15 \text{ kHz}$  cunoscând  $H = 1,756$  și  $f_n = 5 \text{ kHz}$ .

- D. Se consideră un filtru activ de tip Butterworth de ordin II pentru care au fost măsurate atenuările de inserție la frecvențele de  $10 \text{ kHz}$  și  $15 \text{ kHz}$  rezultând  $a_i(10 \text{ kHz}) = 2,96 \text{ dB}$  și  $a_i(15 \text{ kHz}) = 5,9 \text{ dB}$ . Să se determine parametrii funcției de transfer  $H$  și  $f_n$ . Se dă

$$T(s_n) = \frac{H}{s_n^2 + 1,41s_n + 1}$$

- E. Să se determine experimental funcția de transfer normalată a FTJBw2.