

Convoluția Semnalelor

Definiții

- Convoluția este un concept de baza în cadrul teoriei sistemelor liniare
- Teorema convoluției afirmă că răspunsul unui sistem (aflat în condiții inițiale de repaos / zero) la un semnal de intrare arbitrar este format din convoluția între acel semnal de intrare și funcția pondere (răspunsul la impuls) a sistemului considerat.

Convoluția în timp continuu a două semnale $x_1(t)$ și $x_2(t)$ este definită de relația:

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau \quad ; \quad -\infty < t < \infty$$

În relația anterioară τ este variabila de integrare și t este un parametru. Durata unui semnal $x_i(t)$ este definit de momentele de timp t_i și T_i astfel încât pentru orice valoare t în afara intervalului $[t_i, T_i]$ semnalul să fie zero, adică $x_i(t) = 0, t \notin [t_i, T_i]$

Proprietățile integralei de convoluție sunt:

1. Comutativitate

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

2. Distributivitate

$$x_1(t) * \{x_2(t) + x_3(t)\} = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$

3. Asociativitate

$$x_1(t) * \{x_2(t) * x_3(t)\} = \{x_1(t) * x_2(t)\} * x_3(t)$$

4. Durata

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_1 + t_2 \\ \int_{t_1+t_2}^{T_1+T_2} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau & ; \quad t_1 + t_2 \leq t \leq T_1 + T_2 \\ 0, & t \geq T_1 + T_2 \end{cases}$$

5. Deplasarea în domeniul timp

Fie $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$. Atunci convoluția semnalelor deplasate în timp este caracterizată de următoarele relații:

$$x_1(t - \tau_1) * x_2(t) = x(t - \tau_1)$$

$$x_1(t) * x_2(t - \tau_2) = x(t - \tau_2)$$

$$x_1(t - \tau_1) * x_2(t - \tau_2) = x(t - \tau_1 - \tau_2)$$

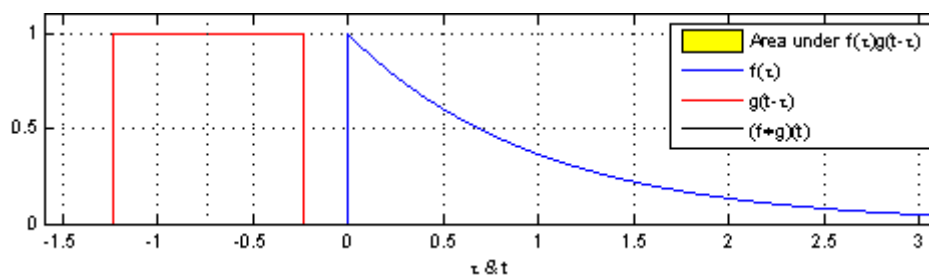
Pentru a înțelege convoluția mai bine, se pot defini trei etape importante în calculul integralei de convoluție:

Pasul 1. Se aplică proprietatea ce caracterizează durata convoluției, pentru definirea / identificarea intervalelor în care aceasta este zero.

Pasul 2. Se oglindește – raportat la axa verticala (Oy) – unul dintre semnale, adică se reprezintă unul dintre semnale raportat la coordonata de timp $-\tau$.

Pasul 3. Se variază parametrul t de la $-\infty$ la $\infty \Rightarrow$ adică se va deplasa semnalul simetrizat (ogluit) fata de axa Oy de la stânga la dreapta pe axa timpului, fiind observate intervalele de suprapunere cu celălalt semnal (cu care se calculează convoluția) și se va evalua integrala produsului celor doua semnale pe aceste intervale de suprapunere. Cu alte cuvinte, convoluția poate fi interpretată ca o măsură a „similitudinii“ sau „suprapunerii“ celor doua semnale pe intervalele lor de definiție.

În graficele din Fig.1 se poate vedea deplasarea de-a lungul axei timpului a semnalului dreptunghiular (cu roșu) și suprapunerea acestuia cu cel parabolic (albastru). Se observă că inițial produsul de convoluție este zero (Fig. 1-a) deoarece cele doua semnale nu se suprapun deloc. Glisând semnalul roșu de la stânga către dreapta peste semnalul albastru, se observă cum progresiv aria de suprapunere crește (zona marcată cu galben Fig. 1-b, 1-c), atingând la un moment dat un maxim, urmând mai apoi o descreștere progresiva a ariei de suprapunere (integralei de convoluție). Simultan cu suprapunerea se observă și o desenare progresivă a graficului funcției de convoluție (linia neagră care începe în -0.5). Valoarea acestei funcții la un moment dat (deci valoarea pe graficul negru) reprezintă aria comună de suprapunere a celor doua grafice (roșu și albastru) la momentul respectiv – deci valoarea integralei de convoluție calculata în acel moment. Pentru o vizualizare dinamica și completă a graficelor din Fig. 1 recomandăm vizitarea paginii web <https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution>



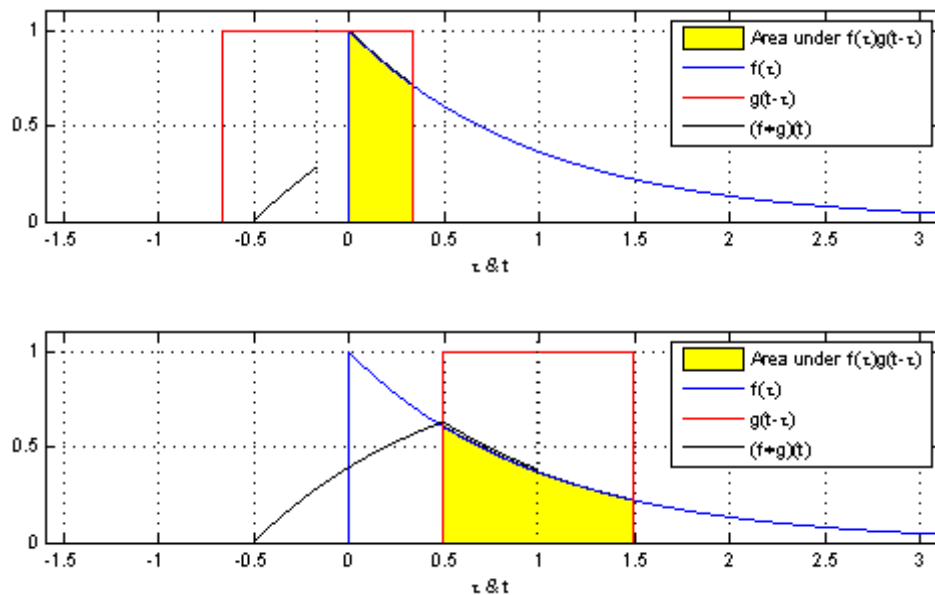


Fig. 1 Convoluția unui semnal dreptunghiular cu unul exponențial (parabolic):
a- sus; b – mijloc; c-jos

Exemple de convoluție pentru diferite semnale

Exemplul 1 – Semnal dreptunghiular cu el însuși

Fie $f(t)$ o funcție definită în felul următor:

$$f(t) = \begin{cases} 1; & 0 \leq t \leq 0.1 \\ 0; & \text{in rest} \end{cases}$$

Pentru determinarea convoluției semnalului de mai sus cu el însuși, se poate utiliza următorul cod Matlab / Octave.

```
clc;
clear all;
close all;

tstart = 0;
tstop = 0.1;
tpas = 0.0001;

t = tstart: tpas : tstop;
x = ones (1,1001);

subplot(3, 1, 1);
plot(t, x, 'linewidth', 3);
axis ([-0.102 0.212 0 1.2]); grid;

h = ones (1,1001);
subplot(3, 1, 2);
plot(t, h, 'linewidth', 3);
axis ([-0.102 0.212 0 1.2]); grid;

t2 = 2*tstart: tpas: 2*tstop;
y = conv(x, h) * tpas;
```

```
subplot (3, 1, 3);
plot(t2, y, 'r', 'linewidth', 2);
axis ([-0.102 0.312 0 0.12]); grid;
```

Explicația codului:

Liniile 1 la 3 resetează mediul de variabile Matlab / Octave, închide figuri existente etc.

Liniile 5 la 7 inițializează capetele de interval unde funcția este nenula, precum și pasul care va fi considerat pentru calculul valorilor (distanța între două puncte în intervalul $tstart... tstop$)

Liniile 9 și 10 definesc vectorul de valori temporale (t) și valorile corespunzătoare (vectorul x și vectorul h , de dimensiune identica cu vectorul t). A se vedea și Fig. 2 de mai jos

Name	Klasse	Dimension	Wert	Attribut
h	double	1x1001	1:0:1	
t	double	1x1001	0:0.0001:0.1	
t2	double	1x2001	0:0.0001:0.2	
tpas	double	1x1	0.00010000	
tstart	double	1x1	0	
tstop	double	1x1	0.10000	
x	double	1x1001	1:0:1	
y	double	1x2001	[0.00010000, 0.0...	

Fig. 2 Zona Workspace în mediul Octave / Matlab unde sunt definite variabilele alocate

Liniile 12 la 20 reprezintă grafic cele două funcții x și h (generată la linia 16)

Liniile 21 și 22 generează convoluția $y=x*h$; se observă suportul $t2$ – nenul pe un interval diferit de cel al lui t .

Liniile 24 la 26 reprezintă grafic produsul de convoluție (ultimul grafic de mai jos, cu roșu)

Observații:

Vectorii h , t și x au 1001 (1x1001) elemente, după cum se vede în Fig. 2. Acest lucru rezultă din următoarele specificații combinate:

- $tstop - tstart = 0.1$
- $(tstop - tstart) / tpas = 0.1 / 0.0001 = 1000$
- Intervalul este închis la ambele capete în acest exemplu, deci se mai adaugă încă o valoare la cele 1000 de elemente deja existente => 1001 elemente în vector.

Vectorii $t2$ și y conțin 2001 elemente. Raționamentul este similar celui descris anterior. Numărul dublu de elemente (2000 fata de 1000) se justifica daca se considera Proprietatea 4 (Durata) a integralei de convoluție, amintita anterior în aceasta platforma.

În Fig. 3 se vede reprezentarea grafică a semnalelor generate mai sus precum și a convoluției lor (ultimul grafic din imagine, cu roșu).

Se observă valoarea maxima a convoluției este 0.1, și aceasta valoare este obținută exact în momentul suprapunerii maxime a celor două semnale (din Fig. 3 sus și mijloc). Aria comună în acest caz este $0.1 * 1 = 0.1$. „Momentul de timp“ la care se întâmplă acest lucru este 0.1. Practic, unul din cele două semnale considerate este „rotit“ și „împins“ peste celălalt pornind din stânga către dreapta pe grafic (a se vedea și introducerea teoretică de mai înainte). Când graficul „împins“ depășește punctul de suprapunere maximă, valoarea de convoluție începe să scadă (rampa descendentă a triunghiului de convoluție din Fig. 3). În momentul în care cele două semnale se despart definitiv (nu se mai suprapun deloc), convoluția devine 0 ($t_2 > 0.2$).

Exercițiu: Să se modifice codul astfel încât unul dintre semnalele x sau h să aibă o durată de 0.05 ($0 \leq t \leq 0.05$). Celălalt rămâne definit ca mai înainte. Să se afișeze graficul funcției de convoluție în aceasta nouă situație. Să se comenteze rezultatul obținut. Să se modifice și reprezentările grafice astfel încât acestea să se alinieze la zero, pe verticală.

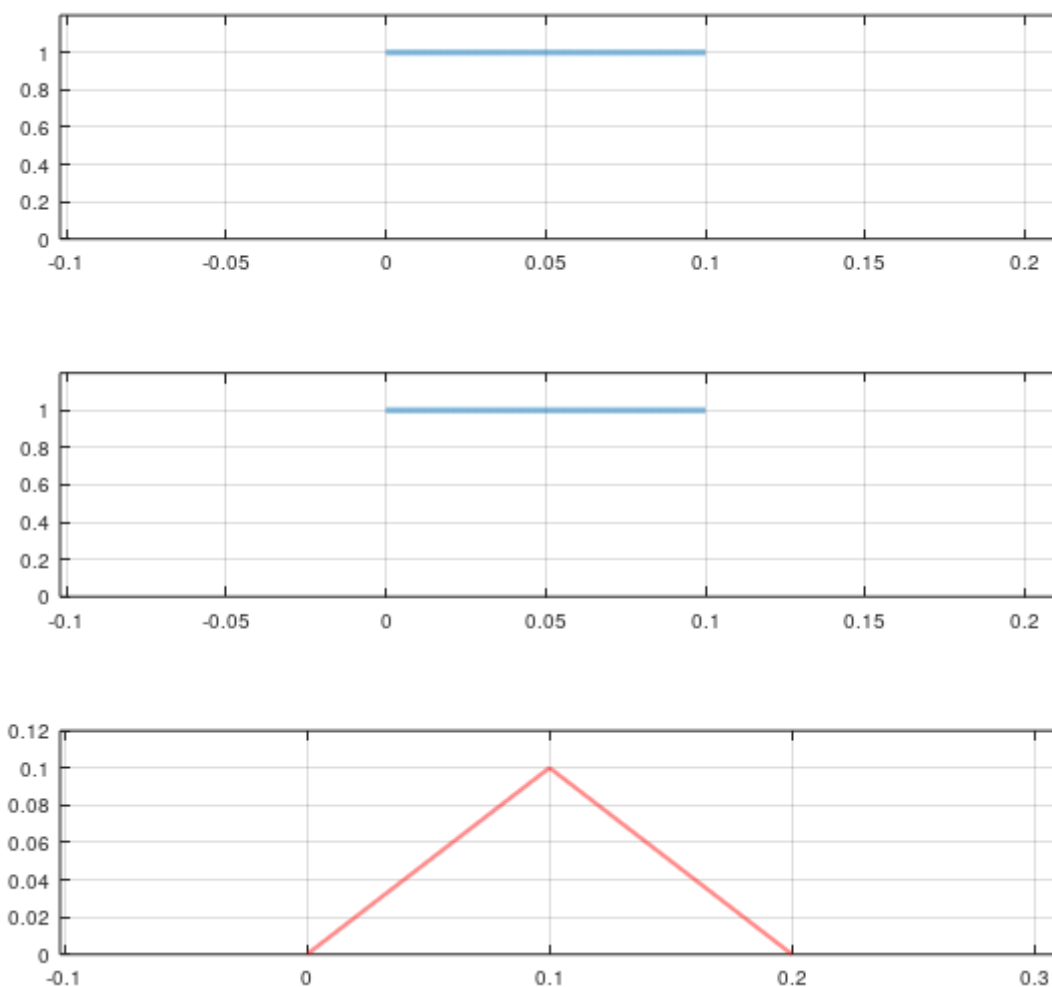


Fig. 3 Convoluția unui semnal dreptunghiular cu el însuși – (sus și mijloc: x și h);
jos – convoluția $y=x*h$

Exemplul 2 – Semnal rampa descrescătoare cu semnal exponențial descrescător

Fie $x(t)$ și $h(t)$ două funcții definite în felul următor:

$$x(t) = \begin{cases} 1 - 10t; & 0 \leq t \leq 0.1 \\ 0; & \text{in rest} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} e^{-ft}; & 0 \leq t \leq 0.1 \\ 0; & \text{in rest} \end{cases}$$

Pentru determinarea convoluției semnalelor de mai sus, $x(t)$ și $h(t)$, se poate utiliza următorul cod Matlab / Octave.

```
clc;
clear all;
close all;

tstart = 0;
tstop = 0.1;
tpas = 0.0001;
f = 100;

t = tstart : tpas : tstop;
x = 1-10*t;

subplot(3, 1, 1);
plot(t, x, 'linewidth', 2);
axis([0 0.1001 0 1]); grid;

h = 1 * exp(-f*t);
subplot(3, 1, 2);
plot(t, h, 'linewidth', 2);
axis([0 0.1001 0 1]); grid;

t2 = 2*tstart: tpas : 2*tstop;
y = conv(x, h) * tpas;

subplot(3, 1, 3);
plot(t2, y, 'r', 'linewidth', 2);
axis(); grid;
```

În acest exemplu avem două funcții / semnale distincte pentru care se calculează convoluția. Funcția Matlab / Octave care implementează convoluția se numește *conv*, apelul acesteia fiind similar cu cel prezentat în primul exemplu. Se observă alinierea pe verticală a axelor, la zero.

Întrebare: De ce se înmulțește valoarea de la linia 23 cu *tpas*?

În *Fig. 4* este reprezentată grafic convoluția semnalelor definite mai sus. Modul de calcul grafic „teoretic” este similar celui descris la exemplul anterior. Se

observă și în acest caz intervalul de definiție al convoluției (suportul temporal) conform cu Proprietatea 4 (Durata) a integralei de convoluție.

Exercițiu: Să se modifice codul astfel încât unul dintre semnale să fie rampă crescătoare în loc de rampă descrescătoare (deci are valoarea 0 la $t=0$ și 1 la $t=0.1$). Să se afișeze graficul funcției de convoluție în aceasta nouă situație. Să se comenteze rezultatul obținut. Ce trebuie modificat în cod pentru a obține o variație exponențială mai „lină“?

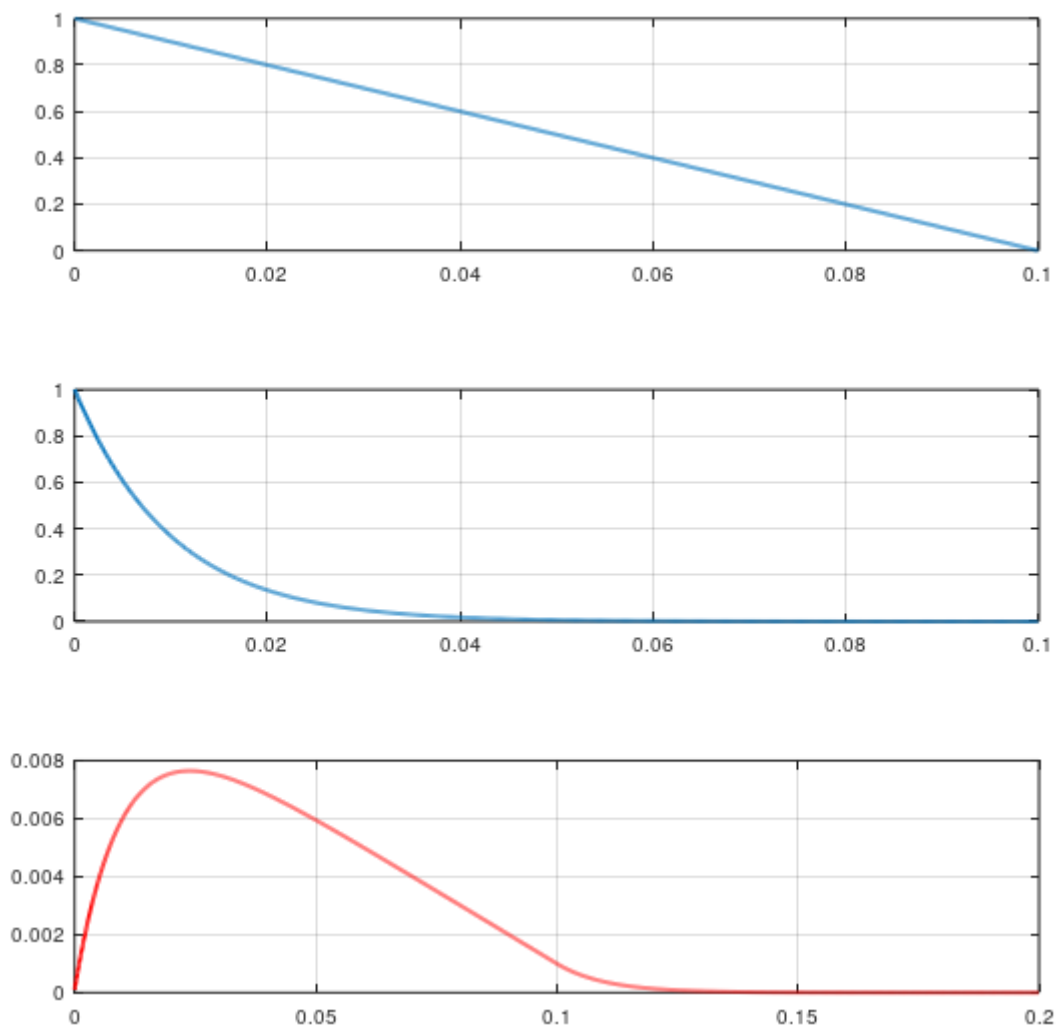


Fig. 4 Convoluția semnalului rampă cu semnalul exponențial – (sus și mijloc: x și h);
jos – convoluția $y=x*h$

Funcția de (auto)corelație a doua semnale

Funcția de corelație în timp continuu a două semnale $x_1(t)$ și $x_2(t)$ este definită de relația:

$$x(\tau) = (x_1 * x_2)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(t) x_2(t + \tau) dt \quad ; \quad -\infty < t < \infty$$

În relația anterioară $x_1^*(t)$ reprezintă complex conjugata lui $x_1(t)$, τ este „deplasarea” sau „întârzierea”. Interpretarea este în sensul următor: o caracteristică a semnalului ce apare în cadrul lui x_1 la momentul t , se regăsește și în x_2 la momentul de timp $t + \tau$.

Funcția de corelație reprezintă o măsură a similitudinii (suprapunerii) între elementele unui vector x și valori deplasate (întârziate) ale unui vector y – ca funcție a deplasării. Corelația este folosită deseori pentru căutarea unei anumite secvențe mai scurte (subvector cu anumite valori) în cadrul unui semnal (vector) mai lung.

Exemplu – Corelația unui semnal exponențial cu el însuși (autocorelație) – timp discret

În Matlab / Octave se poate folosi funcția `xcorr` pentru a determina corelația (denumită în engleza cross-correlation) între două semnale. Dacă cele două secvențe sunt identice (același semnal) vorbim de autocorelația semnalului.

Codul de mai jos determină autocorelația semnalului $e^{-n/4}$. Se folosește funcția `xcorr`.

```
clc;
clear all;
close all;

n = 0:10;
x = exp(-n/4);
y = exp(-n/4);
[z, intarziere] = xcorr(x, y);

subplot(3, 1, 1);
stem (n, x);
axis(); grid; title('x');

subplot(3, 1, 2);
stem (n, y);
axis(); grid; title('y');

subplot(3, 1, 3);
stem (intarziere, z);
axis(); grid; title('z = x*y');
```

Codul generează următoarele secvențe grafice, pentru x , y și funcția de corelație a acestora, adică $z = x*y$. Se observă că în acest exemplu s-a ales $x = y$ (autocorelație). Pentru reprezentarea grafică în timp discret s-a folosit funcția Matlab / Octave `stem`.

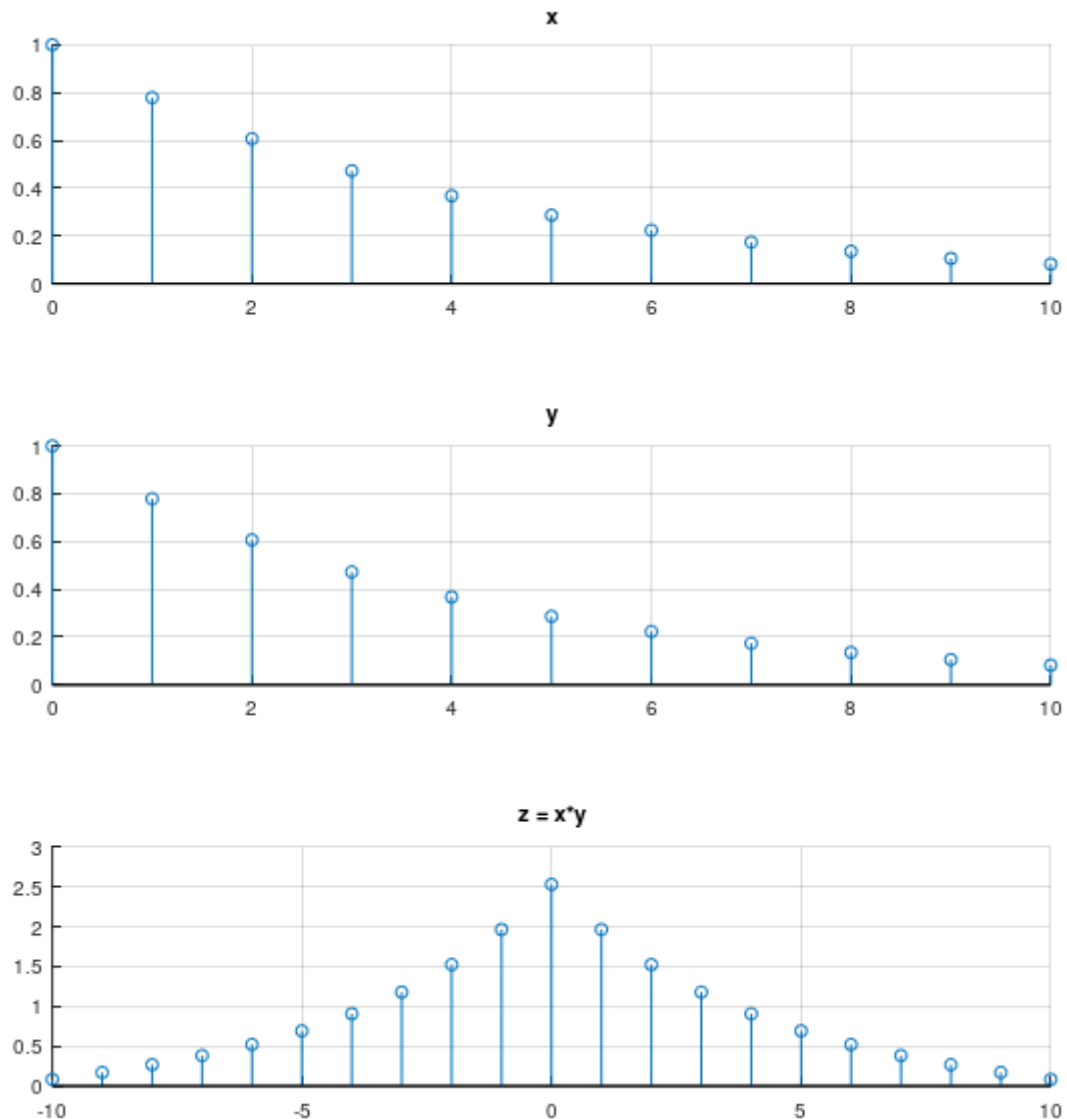


Fig. 5 Autocorelația semnalului exponențial

Observații:

- Maximul funcției de corelație este atins pentru valoarea 0, deci când cele două semnale nu sunt deplasate unul față de celălalt.
- Pe măsură ce se deplasează un semnal față de celălalt, corelația lor scade. De asemenea, se observă simetria valorilor corelației față de axa Oy (paritatea funcției de corelație).
- La valori ale deplasării mai mari ca 10, corelația devine 0 deoarece cele două semnale nu se mai suprapun deloc.

Temă de casa

- Se definesc: $x(t) = t; t \in [0, 1]$ și $y(t) = t^2; t \in [0, 1]$.
- Se definesc: $x(t) = t; t \in [0, 1]; x(t) = t^2; t \in (1, 2]$ și $y(t) = t^{-3}; t \in [1, 2]$.
- Se definesc $x(t) = t; t \in [1, 2];$ și $y(t) = t^2; t \in [0, 2]$

4. Se definesc funcțiile $x(t) = a * t + b; t \in [1, 2]$ astfel încât $x(1) = 2; x(2) = 1$ și $y(t) = t^2; t \in [0, 2]$. Să se determine $x(t)$.
 5. Se definesc funcțiile $x(t) = a * t + b; t \in [0, 1]$ astfel încât $x(0) = 0; x(1) = 4$ și $y(t) = c * t + d; t \in [1, 2]$ astfel încât $x(1) = 3; x(2) = 0$. Să se determine $x(t)$.
 6. Se definesc funcțiile $x(t) = a * t + b; t \in [0, 2]$ astfel încât $x(0) = 3; x(2) = 1$ și $y(t) = c * t + d; t \in [1, 2]$ astfel încât $x(1) = 3; x(2) = 0$.
 7. Se definesc: $x(t) = 2^{-t}; t \in [1, 2]$; și $y(t) = 3^{-t}; t \in [1, 2]$.
- a) Pentru semnalele definite mai sus, să se implementeze codul necesar generării funcției de convoluție și să se reprezinte grafic cele trei semnale (x , y și convoluția lor). Acolo unde este necesar, se vor determina în prealabil și parametrii a, b, c, d ai semnalelor corespunzătoare.
- b) Să se redefină semnalele de mai sus pe intervale numerice discrete similar cu exemplul de mai sus (eventual ajustând intervalele de definiție ale funcțiilor cu noi valori, dacă este cazul). Să se implementeze funcția de corelație între ele. Pasul între două valori consecutive pe axa timpului discret să fie ales convenabil pentru o reprezentare cu funcția *stem*.

Bibliografie

1. Mateescu, Adelaida, Dumitriu, N., Stanciu, L., **Semnale, circuite și sisteme**, Teora, București, 2001.