

LUCRAREA 5

FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

5.1. Proiectarea filtrelor analogice

Funcția de transfer a unui filtru analogic de ordinul N este:

$$H_a(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=0}^M c_i s^i}{\sum_{i=0}^N d_i s^i} \quad ; \quad N \geq M \quad (5.1)$$

Răspunsul în frecvență (la frecvențe fizice) este funcția de sistem evaluată pe axa imaginară a planului s . Proiectarea unui filtru analogic constă în determinarea coeficienților c_i, d_i , care conduc la optimizarea pătratului modulului funcției de transfer $|H_a(j\Omega)|^2$, în conformitate cu un anumit criteriu de minimizare a erorii dintre funcția dorită (*funcția de aproximat*) și cea realizată (*funcția aproximantă*). Se lucrează cu $|H_a(j\Omega)|^2$ (și nu cu $|H_a(j\Omega)|$) pentru că este o funcție rațională.

Filtre analogice de tip Butterworth

Răspunsul în frecvență al unui filtru analogic trece jos de tip Butterworth de ordinul N și frecvență de tăiere Ω_t este dat de expresia:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_t}\right)^{2N}} \quad (5.2)$$

Acesta realizează o caracteristică de tip maxim plat la $\Omega = 0$ în sensul că primele $2N - 1$ derivate sunt nule la $\Omega = 0$. La $\Omega = \Omega_t$, indiferent de ordinul N , pătratul modulului este $1/2$. Creșterea lui N conduce însă la îngustarea zonei de tranziție. Caracteristica $|H_a(j\Omega)|^2$ realizează o aproximare de tip maxim plat și la $\Omega \rightarrow \infty$, pentru aceasta frecvență toate derivatele fiind nule.

Filtre analogice de tip Cebîșev I

Filtrele Cebîșev de tipul I sunt filtre polinomiale (de tipul numai cu poli), având o caracteristică de modul cu ripluri egale în banda de trecere și monoton descrescătoare în banda de oprire. Dintre toate filtrele polinomiale de ordinul N , filtrele Cebîșev de tipul I au zona de tranziție cea mai îngustă.

Pentru un filtru analogic trece jos de tip Cebîșev I de ordinul N și cu frecvența limită superioară a benzii de trecere Ω_e , pătratul modulului funcției de transfer este dat de relația:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_e}\right)} \quad (5.3)$$

în care $C_N(x)$ este polinomul Cebîșev de ordinul N :

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x) & , \text{pentru } |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x) & , \text{pentru } |x| > 1 \end{cases} \quad (5.4)$$

În banda de oprire, caracteristica monoton descrescătoare a modulului funcției de transfer realizează o aproximare de tip maxim plat a valorii ideale zero, deoarece toate derivatele sale se anulează pentru $\Omega \rightarrow \infty$.

Filtre analogice de tip Cebîșev II

Filtrele Cebîșev de tipul II realizează o aproximare în sens Cebîșev a modulului funcției de transfer în zona de oprire, modulul descrescând monoton în zona de trecere.

Pentru un filtru analogic trece jos de tip Cebîșev II de ordinul N și cu frecvența limită inferioară a benzii de oprire Ω_b , pătratul modulului funcției de transfer este dat de relația:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_b}{\Omega}\right)} = \frac{\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_b}{\Omega}\right)}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_b}{\Omega}\right)} \quad (5.5)$$

în care $C_N(x)$ este polinomul Cebîșev de ordinul N (vezi relația 5.4):

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

Filtre analogice de tip eliptic

Filtrele eliptice (denumite și *filtre Cauer*) au o caracteristică de modul cu ripluri egale în ambele benzi de trecere și de oprire, motiv pentru care se mai numesc și filtre echiriplu.

Pentru un filtru analogic trece jos de tip eliptic, de ordinul N , pătratul modulului funcției de transfer este dat de relația:

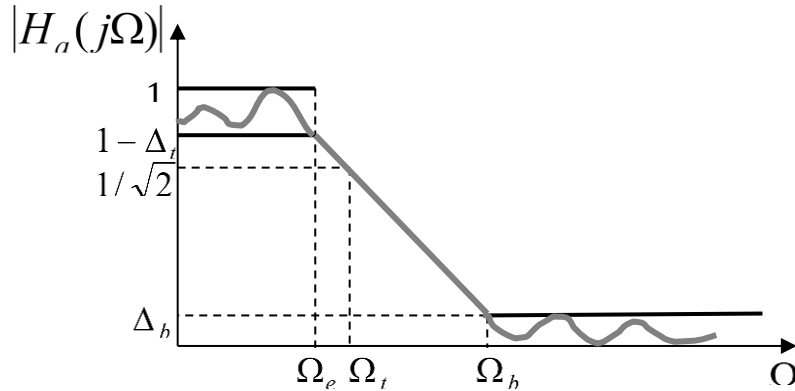
$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 F_N^2(\Omega)} \quad (5.6)$$

unde funcția rațională Cebîșev $F_N(\Omega)$, introdusă pentru prima dată de Cauer în teoria circuitelor liniare, se exprimă astfel:

$$F_N(\Omega) = \begin{cases} C_1 \prod_{i=1}^{\frac{N}{2}} \frac{\Omega^2 - \Omega_i^2}{\Omega^2 - \frac{\Omega_0^4}{\Omega_i^2}}, & \text{pentru } N = \text{par} \\ C_2 \prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} \Omega \frac{\Omega^2 - \Omega_i^2}{\Omega^2 - \frac{\Omega_0^4}{\Omega_i^2}}, & \text{pentru } N = \text{impar} \end{cases} \quad (5.7)$$

Filtrele eliptice sunt considerate optime, în sensul că, pentru un același ordin N și aceleași frecvențe limite Ω_e și Ω_b , realizează cele mai mici ripluri în benzile de trecere și de oprire comparativ cu toate celelalte tipuri de filtre.

Datele de gabarit pentru filtrele analogice (exemplificare pentru un FTJ)



5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

Se consideră că:

- zona de trecere efectivă variază între valoarea maximă 1 și valoarea minimă $1 - \Delta_t$;
- zona de blocare variază între 0 și Δ_b ;
- $\Omega_e, \Omega_b, \Omega_t$ reprezintă în ordine frecvența de trecere efectivă, frecvența de oprire efectivă și frecvența de tăiere teoretică, exprimate în radiani/secundă.

Uzual la proiectare aceste performanțe sunt date în dB, sub forma atenuării maxime în bandă de trecere efectivă, a_M și a atenuării minime în zona de oprire efectivă, a_m :

$$a_M = -20\lg(1 - \Delta_t) \quad (5.8)$$

$$a_m = -20\lg(\Delta_b) \quad (5.9)$$

5.2.1. Proiectarea filtrelor analogice folosind funcții MATLAB

A. Determinarea ordinului și frecvenței de tăiere pornind de la condițiile de gabarit

Funcțiile MATLAB `buttord`, `cheb1ord`, `cheb2ord` și `ellipord` permit determinarea ordinului minim și a frecvenței de tăiere pentru tipurile de filtre analogice prezentate anterior (în ordine: *Butterworth*, *Cebîșev I*, *Cebîșev II* și *eliptice*), pornind de la specificațiile de gabarit.

Sintaxa generală:

[n,Wn]=nume_functie(Wp,Ws,Rp,Rs,'s')

- `nume_functie` poate fi oricare dintre funcțiile `buttord`, `cheb1ord`, `cheb2ord` și `ellipord`;
- R_p reprezintă dimensiunea riplului (exprimată în dB) din banda de trecere (atenuarea maximă din banda de trecere) iar R_s reprezintă dimensiunea riplului (exprimată în dB) din banda de oprire (atenuarea minimă din banda de oprire);
- W_p și W_s sunt frecvențele limită ale benzilor de trecere și de oprire; ele vor fi exprimate în radiani/secundă și vor fi mai mari ca 1; în cazul filtrelor trece bandă și oprește bandă W_p și W_s vor fi vectori cu două elemente;
- `'s'` indică faptul că este vorba de un filtru analogic;
- se vor returna:

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

- 1) *ordinul minim* n (vezi relația (5.23)) al unui filtru analogic de tipul corespunzător dat de `nume_functie`, ce satisface condițiile de gabarit impuse prin W_p, W_s, R_p, R_s ;
- 2) *frecvența de tăiere* W_n (frecvența la 3 dB) a aceluiași filtru; în cazul filtrelor trece bandă și oprește bandă W_n va fi un vector cu două elemente deoarece aceste filtre prezintă două zone de tăiere.

Ordinul filtrului analogic n și frecvența sa de tăiere W_n , ce constituie argumentele de ieșire ale funcțiilor prezentate anterior, vor servi ca parametrii de intrare pentru o nouă categorie de funcții MATLAB – `butter`, `cheby1`, `cheby2` și `ellip` – care au drept rezultat chiar coeficienții funcției de transfer a filtrului analogic respectiv.

B. Determinarea funcției de transfer a filtrului analogic

În MATLAB, funcția de transfer a unui filtru analogic cu răspuns infinit la impuls de ordinul n este privită sub forma:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b(1)s^n + b(2)s^{n-1} + \dots + b(n)s + b(n+1)}{s^n + a(2)s^{n-1} + a(3)s^{n-2} + \dots + a(n)s + a(n+1)} \quad (5.10)$$

butter - Filtre analogice de tip Butterworth

Sintaxe:

[b,a] = butter(n,Wn,'s')

- proiectează un *filtru analogic trece jos* de ordinul n cu frecvența de tăiere W_n (frecvența este exprimată în radiani/secundă); se vor returna vectorii linie b și a de lungime $n + 1$ ce conțin coeficienții funcției de transfer $H(s)$ a filtrului ($b = [b(1), b(2), \dots, b(n), b(n+1)]$, $a = [1, a(2), \dots, a(n), a(n+1)]$); vezi relația (5.10); dacă W_n este un vector cu două elemente, $W_n = [w1, w2]$, cu $w1 < w2$, se va proiecta un *filtru analogic trece bandă* de ordinul $2n$, cu banda de trecere cuprinsă între frecvențele $w1$ și $w2$; 's' indică faptul că este vorba despre un filtru analogic.

[b,a] = butter(n,Wn,'high','s')

- proiectează un *filtru analogic trece sus* de ordinul n cu frecvența de tăiere W_n ;

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

[b,a] = butter(n,Wn,'stop','s')

- Wn este un vector cu două elemente, Wn=[w1,w2] cu $w1 < w2$; se va proiecta un *filtru analogic oprește bandă* de ordinul 2n, cu banda de oprire cuprinsă între w1 și w2.

cheby1 - Filtre analogice de tip Cebîșev I

Sintaxe:

[b,a] = cheby1(n,Rp,Wn,'s')

[b,a] = cheby1(n,Rp,Wn,'high','s')

[b,a] = cheby1(n,Rp,Wn,'stop','s')

- rămân valabile aceleași considerente pentru parametrii de intrare și de ieșire ca în sintaxele de la funcția butter; în plus apare parametrul de intrare Rp care reprezintă dimensiunea riplului (exprimată în dB) din banda de trecere (atenuarea maximă din banda de trecere).

cheby2 - Filtre analogice de tip Cebîșev II

Sintaxe:

[b,a] = cheby2(n,Rs,Wn,'s')

[b,a] = cheby2(n,Rs,Wn,'high','s')

[b,a] = cheby2(n,Rs,Wn,'stop','s')

- rămân valabile aceleași considerente pentru parametrii de intrare și de ieșire ca în sintaxele de la funcția butter; în plus apare parametrul de intrare Rs care reprezintă dimensiunea riplului (exprimată în dB) din banda de oprire (atenuarea minimă din banda de oprire).

ellip - Filtre analogice de tip eliptic (filtre Cauer)

Sintaxe:

[b,a] = ellip(n,Rp,Rs,Wn,'s')

[b,a] = ellip(n,Rp,Rs,Wn,'high','s')

[b,a] = ellip(n,Rp,Rs,Wn,'stop','s')

- rămân valabile aceleași considerente pentru parametrii de intrare și de ieșire ca în sintaxele de la funcția butter; în plus apar parametrii de intrare Rp și Rs cu semnificațiile de la funcțiile cheby1 și cheby2.

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

Exemple:

1. Să se proiecteze un filtru analogic trece jos de tip Butterworth, știind că:
 - la frecvența $F_e = 2\text{kHz}$ atenuarea este mai mică de 1 dB, adică $R_p = 1\text{dB}$;
 - la frecvența $F_b = 3\text{kHz}$ atenuarea este mai mare de 20 dB, adică $R_s = 20\text{dB}$;

Rezolvare Se calculează pulsațiile limită ale benzilor de trecere și oprire pentru filtrul analogic:

$$\Omega_e = 2\pi F_e = 4000\pi \text{ radiani/secundă}$$

$$\Omega_b = 2\pi F_b = 6000\pi \text{ radiani/secundă}$$

și se determină ordinul și pulsația de tăiere folosind funcția `buttord`.

```
Fe = 2000; Fb = 3000;
```

```
Oe = 2*pi*Fe;
```

```
Ob = 2*pi*Fb;
```

```
[n,Wt] = buttord(Oe,Ob,1,20,'s')    →    n = 8  
                                         Wt= 1.4144e+004
```

// ordinul filtrului analogic este $n = 8$ iar frecvența sa de tăiere este egală cu 14144 radiani/secundă (se observă că această valoare aparține într-adevăr intervalului $[\Omega_e, \Omega_b]$).

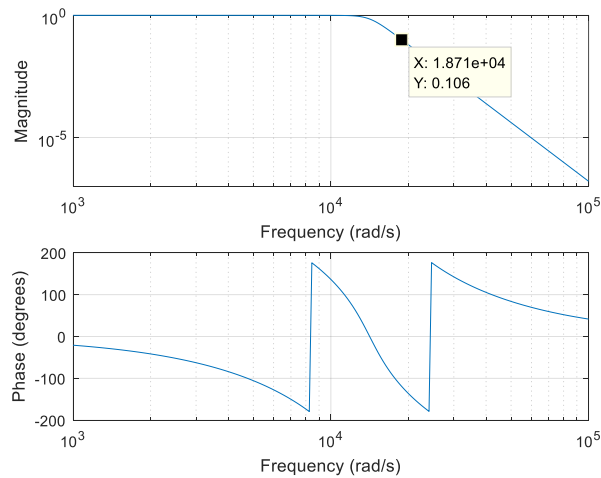
Valorile n și Wt obținute reprezintă parametrii de intrare pentru funcția `butter` care va avea ca rezultat coeficienții funcției de transfer a filtrului analogic (vezi sintaxa și relația (5.23)):

```
[bs,as] = butter(n,Wt,'s')
```

Caracteristicile amplitudine-frecvență și fază-frecvență ale filtrului analogic se pot vizualiza folosind:

```
freqs(bs,as)
```

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS



Pe grafic se poate observa, folosind cursorul, că la pulsația $\Omega_b = 6000\pi = 18840$ corespunzătoare $F_b = 3\text{kHz}$, câștigul filtrului este aproximativ 0.1 ceea ce înseamnă o atenuare de 20 dB.

2. Să se proiecteze un filtru analogic trece jos de tip Cebîșev1, știind că:

- la frecvența $F_e = 2\text{kHz}$ atenuarea este mai mică de 3 dB, adică $R_p = 3\text{dB}$;
- la frecvența $F_b = 3\text{kHz}$ atenuarea este mai mare de 20 dB, adică $R_s = 20\text{dB}$;

```
Fe = 2000; Fb = 3000;
```

```
Oe = 2*pi*Fe;
```

```
Ob = 2*pi*Fb;
```

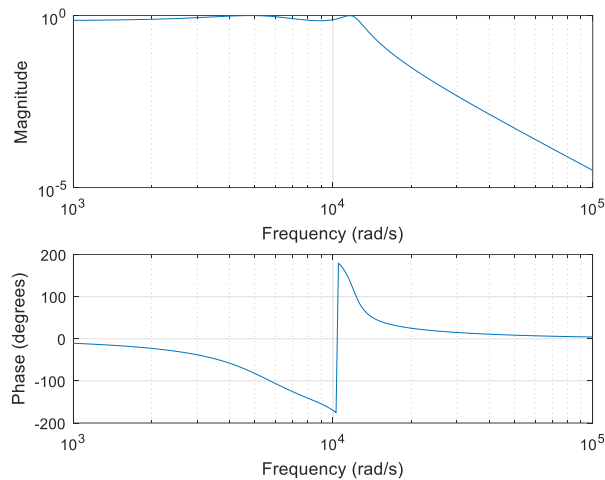
```
[n,Wt] = cheblord(Oe,Ob,3,20,'s') → n = 4  
Wt= 1.2566e+04
```

// ordinul filtrului analogic este $n = 4$ iar pulsația de tăiere este egală cu pulsația limită a benzii de trecere $\Omega_e = 2\pi F_e = 4000\pi = 12566$ radiani/secundă

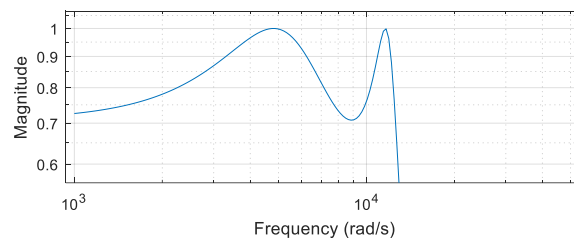
```
[bs,as] = cheby1(n,3,Wt,'s')
```

```
freqs(bs,as)
```


5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS



De asemenea, se poate observa cu zoom-in că în banda de trecere filtrul de tip Cebîșev1 are ripluri între 1 și 0.7 (corespunzător atenuării de 3dB)



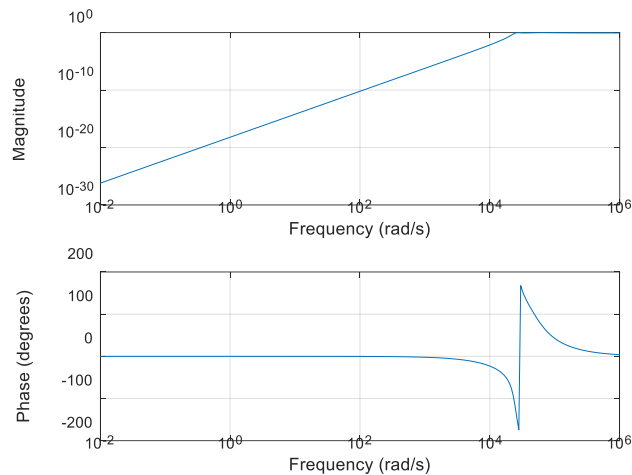
3. Să se proiecteze un filtru analogic trece sus de tip Cebîșev1, știind că:

- la frecvența $F_e = 4\text{kHz}$ atenuarea este mai mică de 1 dB, adică $R_p = 1\text{dB}$;
- la frecvența $F_b = 2\text{kHz}$ atenuarea este mai mare de 30 dB, adică $R_s = 30\text{dB}$;

Atenție! Fiind un filtru trece sus, frecvența limită a benzii de trecere trebuie să fie mai mare decât frecvența limită a benzii de oprire

```
Fe = 4000; Fb = 2000;  
Oe = 2*pi*Fe;  
Ob = 2*pi*Fb;  
[n,Wt] = cheblord(Oe,Ob,1,30,'s')  
[bs,as] = cheby1(n,1,Wt,'high','s')  
freqs(bs,as)
```

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

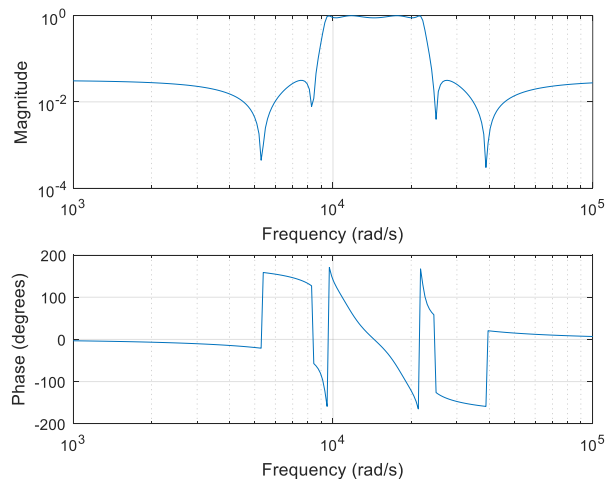


4. Să se proiecteze un filtru analogic trece banda de tip eliptic, știind că:

- între frecvențele $F_{e1} = 1,5\text{kHz}$ și $F_{e2} = 3,5\text{kHz}$ atenuarea este mai mică de 1 dB;
- la frecvențe mai mici de $F_{b1} = 1\text{kHz}$ și mai mari de $F_{b2} = 4\text{kHz}$ atenuarea este mai mare de 30 dB;

Atenție! Pentru a proiecta un filtru trece bandă sau oprește bandă trebuie creat câte un vector cu două elemente pentru frecvențele limită ale benzii de trecere respectiv pentru frecvențele limită ale benzii de oprire.

```
Fe = [1500, 3500]; Fb = [1000, 4000];  
Oe = 2*pi*Fe;  
Ob = 2*pi*Fb;  
[n,Wt] = ellipord(Oe,Ob,1,30,'s')  
[bs,as] = ellip(n,1,30,Wt,'s')  
freqs(bs,as)
```



5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

E1. *Exerciții:*

1. Să se proiecteze un filtru analogic trece sus de tip Butterworth, știind că:

- la frecvența $F_b = 2\text{kHz}$ atenuarea este mai mare de 40dB;
- la frecvența $F_e = 4\text{kHz}$ atenuarea este mai mică de 1dB;

Să se reprezinte grafic caracteristica amplitudine-frecvență și fază-frecvență ale filtrului analogic.

Reluați problema în cazul unui filtru de tip Cebîșev I, de tip Cebîșev II și în cazul unui filtru de tip eliptic. Comparați filtrele din punct de vedere al ordinului, frecvenței de tăiere și atenuării în banda de trecere și banda de oprire.

2. Să se proiecteze un filtru analogic oprește bandă de tip Butterworth, știind că:

- la frecvențele $F_{e1} = 3\text{kHz}$ și $F_{e2} = 7\text{kHz}$ atenuarea este mai mică de 1dB;
- la frecvențele $F_{b1} = 4\text{kHz}$ și $F_{b2} = 6\text{kHz}$ atenuarea este mai mare de 40dB;

Să se reprezinte grafic caracteristica amplitudine-frecvență și fază-frecvență ale filtrului analogic.

Reluați problema în cazul unui filtru de tip Cebîșev I, de tip Cebîșev II și în cazul unui filtru de tip eliptic. Comparați filtrele din punct de vedere al ordinului, frecvențelor de tăiere și atenuării în banda de trecere și banda de oprire.

5.2. Proiectarea filtrelor digitale RII folosind metode indirecte

Un filtru digital RII este descris în domeniul timp prin ecuația cu diferențe finite:

$$y[n] = \sum_{i=0}^M b_i x[n-i] - \sum_{i=1}^N a_i y[n-i] \quad (5.11)$$

În această situație funcția de transfer devine:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad (5.12)$$

în care s-a presupus că $a_0 = 1$.

Proiectarea unui filtru digital RII constă în determinarea coeficienților a_i și b_i din expresia (5.12) astfel încât răspunsul la impuls al acestuia, $h[n]$, sau răspunsul în frecvență, $H(e^{j\omega})$, să aproximeze într-un anumit mod specificațiile în timp discret sau în frecvență impuse la proiectare.

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

Metodele indirecte de proiectare a filtrelor *RII* sunt bazate pe proiectarea în prealabil a unui filtru analogic și apoi transformarea acestuia într-unul digital.

Pornind de la specificațiile referitoare la performanțele filtrului digital, proiectarea acestuia necesită parcurgerea următoarelor etape:

1. Transformarea specificațiilor dorite pentru filtrul digital în specificații impuse filtrului analogic prototip;
2. Obținerea funcției de transfer a filtrului analogic prototip astfel încât să se realizeze specificațiile deduse la punctul 1;
3. Transformarea funcției de transfer a filtrului analogic în funcția de transfer echivalentă ca performanțe a filtrului digital.

După obținerea funcției de transfer $H_a(s)$ a prototipului analogic trebuie găsită funcția de transfer $H(z)$ a filtrului digital, operație denumită frecvent *discretizarea filtrului analogic*. Aceasta necesită în domeniul timp trecerea de la variabila continuă t la cea discretă n , ceea ce implică pentru caracterizarea în frecvență o transformare de la planul s la planul Z . Sunt cunoscute în literatura de specialitate 4 asemenea proceduri și anume:

1. *Metoda transformării ecuației diferențiale* ce leagă semnalele de intrare și ieșire ale prototipului analogic în *ecuația cu diferențe finite* necesară pentru caracterizarea în domeniul timp a filtrului digital;
2. *Metoda invarianței răspunsului la impuls*;
3. *Metoda transformării biliniare*;
4. *Metoda transformării în z adaptate*.

5.2.1. Metoda invarianței răspunsului la impuls

Această metodă se bazează pe conservarea răspunsului la impuls, în sensul că răspunsul la impuls al filtrului digital, notat $h[n]$ este versiunea eșantionată a răspunsului la impuls al filtrului analogic, notat $h_a(t)$. În continuare vor fi utilizate notația $\Omega = 2\pi F$ pentru a desemna domeniul frecvență al filtrului analogic și notația $\omega = 2\pi f$ pentru a desemna domeniul frecvență normată al filtrului digital.

Procedura de obținere a filtrului digital prin metoda invarianței răspunsului la impuls necesită parcurgerea următoarelor etape:

1. Se descompune $H_a(s)$ în fracții elementare:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad (5.13)$$

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

2. Se determină răspunsul la impuls al filtrului analogic, $h_a(t)$:

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - s_k} \right\} = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \quad (5.14)$$

3. Se determină funcția pondere a filtrului digital:

$$h[n] = T h_a(nT) = T \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u[n] \quad \text{cu} \quad u[n] = u(nT) \quad (5.15)$$

4. Se calculează funcția de transfer $H(z)$:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(T \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} \right) z^{-n} = T \sum_{k=1}^N A_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_k T} z^{-1} \right)^n = \sum_{k=1}^N \frac{T A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (5.16)$$

Efectuând calculele se obțin coeficienții a_i, b_i ai filtrului digital.

Se demonstrează că filtrul digital reproduce răspunsul în frecvență al filtrului analogic pe intervalul de frecvență

$$\Omega \in \left[-\frac{\Omega_s}{2}, \frac{\Omega_s}{2} \right] \Leftrightarrow \omega \in [-\pi, \pi]$$

dacă și numai dacă sunt îndeplinite condițiile:

$$h[n] = T h_a(nT) \quad (5.17)$$

$$\omega = \Omega T \Leftrightarrow \Omega = \frac{\omega}{T} \quad (5.18)$$

$$H_a(j\Omega) = 0 \quad \text{la} \quad |\Omega| \geq \Omega_M \quad (5.19)$$

Metoda dă rezultate bune pentru discretizarea filtrelor analogice al căror răspuns la impuls satisface (chiar aproximativ) condiția de semnal de bandă limitată (relația (5.19)). Ca atare poate fi aplicată la proiectarea FTJ și FTB dar nu și la proiectarea FTS, FOB, FTT. Există totuși FTS, FOB, FTT obținute pe calea invarianței răspunsului la impuls, prin proiectarea unui prototip analogic de tip trece jos, discretizarea acestuia conform relației (5.7) și apoi transformarea filtrului digital trece jos într-unul trece sus sau oprește bandă, folosind transformări de frecvență adecvate.

În realitate funcțiile de transfer ale filtrelor analogice nu satisfac decât cu aproximație condiția (5.19), ele existând pe toată axa frecvențelor, fapt care conduce la efecte de aliere spectrală. Uneori se utilizează un filtru analogic trece jos cu pantă abruptă a caracteristicii de atenuare (denumit *filtru de gardă*), conectat în cascadă cu filtrul analogic prototip pentru a realiza condiția de răspuns în frecvență de bandă limitată al filtrului rezultat.

5.2.2. Metoda transformării biliniare

Transformarea biliniară este o transformare de la planul s la planul Z care conservă forma algebrică (funcție rațională) a funcției de transfer. Este definită prin relația (T reprezintă perioada de eșantionare):

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Leftrightarrow \frac{sT}{2} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (5.20)$$

Avantajele metodei transformării biliniare, care determină utilizarea cu precădere a acesteia pentru discretizarea prototipului analogic, constau în următoarele:

- a) Erorile de aliere inerente metodei invarianței răspunsului la impuls sunt eliminate deoarece întreaga axă $\{j\Omega\}$ a planului s este transformată în conturul cercului unitate din planul z ;
- b) Transformă sisteme analogice stabile în sisteme discrete stabile (deci cerința I este îndeplinită);
- c) Este o transformare algebrică simplă, funcția de transfer a filtrului digital obținându-se din cea a filtrului analogic prin substituția:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (5.21)$$

Există totuși un neajuns al acestei metode constând în transformarea neliniară a axei $\{j\Omega\}$ a planului s în cercul de rază unitate $z = e^{j\omega}$ al planului Z . Pentru a evalua natura și mărimea neliniarității se consideră $s = j\Omega$ în relația (5.10), fapt ce implică $|z| = 1$, adică $z = e^{j\omega}$. Rezultă:

$$\frac{j\Omega T}{2} = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = j \tan \frac{\omega}{2} \Leftrightarrow \Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2} \Leftrightarrow \omega = 2 \tan^{-1} \frac{\Omega T}{2} \quad (5.22)$$

Neliniaritatea implică restrângerea domeniului de aplicabilitate a metodei. Această metoda este indicată atunci când răspunsul sistemului analogic este constant în frecvență sau este format din porțiuni pe care este aproximativ constant. Se aplică cu succes la proiectarea FTJ, FTS, FTB, FOB, FTT.

Considerăm următoarele forme de exprimare pentru:

- funcția de transfer a unui filtru analogic:

$$H(s) = \frac{b(1)s^m + b(2)s^{m-1} + \dots b(m)s + b(m+1)}{a(1)s^n + a(2)s^{n-1} + \dots a(n)s + a(n+1)} \quad (5.23)$$

- funcția de transfer a unui filtru digital:

$$H(z) = \frac{bd(1) + bd(2)z^{-1} + \dots bd(m)z^{-(m-1)} + bd(m+1)z^{-m}}{ad(1) + ad(2)z^{-1} + \dots ad(n)z^{-(n-1)} + ad(n+1)z^{-n}} \quad (5.24)$$

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

5.2.3. Funcțiile MATLAB pentru metodele de trecere de la filtrul analogic la filtrul digital

impinvar - *Metoda invarianței răspunsului la impuls*

Sintaxa:

[bd,ad] = impinvar(b,a,Fs)

- vectorii **b** și **a** vor conține valorile coeficienților numărătorului și respectiv numitorului funcției de transfer a filtrului analogic:
 $b = [b(1), b(2), \dots, b(m+1)]$, $a = [a(1), a(2), \dots, a(n+1)]$; vezi relația (5.23);
- **Fs** reprezintă frecvența de eșantionare exprimată în Hz; *dacă nu este precizată se alege în mod implicit $F_s = 1\text{Hz}$* ;
- *ordinul numărătorului nu poate fi mai mare decât ordinul numitorului pentru funcția de transfer a filtrului analogic ($m \leq n$)*;
- vor rezulta vectorii **bd** și **ad** ce vor conține valorile coeficienților numărătorului și respectiv numitorului funcției de transfer a filtrului digital:
 $bd = [bd(1), bd(2), \dots, bd(m+1)]$, $ad = [ad(1), ad(2), \dots, ad(n+1)]$ (relația (5.24)).

bilinear - *Metoda transformării biliniare*

Sintaxe:

[bd,ad] = bilinear(b,a,Fs)

- vectorii **linie b** și **a** vor conține valorile coeficienților numărătorului și respectiv numitorului funcției de transfer a filtrului analogic:
 $b = [b(1), b(2), \dots, b(m+1)]$, $a = [a(1), a(2), \dots, a(n+1)]$; vezi relația (5.23);
- **Fs** reprezintă frecvența de eșantionare exprimată în Hz;
- *ordinul numărătorului nu poate fi mai mare decât ordinul numitorului pentru funcția de transfer a filtrului analogic ($m \leq n$)*;
- vor rezulta vectorii **linie bd** și **ad** ce vor conține valorile coeficienților numărătorului și respectiv numitorului funcției de transfer a filtrului digital:
 $bd = [bd(1), bd(2), \dots, bd(m+1)]$, $ad = [ad(1), ad(2), \dots, ad(n+1)]$ (relația (5.24)).

Pașii care sunt urmați în proiectarea indirectă a filtrelor digitale RII sunt prezentați în tabelul 1.

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

Tabelul 1

Pas	Funcție Matlab utilizată
I) Proiectare filtru analogic: * aflare n și W_n * proiectare	$[n, W_n] = \begin{cases} \text{buttord} \\ \text{cheblord} \\ \text{cheb2ord} \\ \text{ellipord} \end{cases} (W_p, W_s, R_p, R_s, 's')$ $[b, a] = \begin{cases} \text{butter}(n, W_n, 's') \\ \text{cheby1}(n, R_p, W_n, 's') \\ \text{cheby2}(n, R_s, W_n, 's') \\ \text{ellip}(n, R_p, R_s, W_n, 's') \end{cases}$
II) Transformare $H_a(s)$ în $H(z)$ a) metoda invarianței răspunsului la impuls $\omega = \Omega T \Leftrightarrow \Omega = \frac{\omega}{T}$ sau b) transformarea biliniară $\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2} \Leftrightarrow \omega = 2 \tan^{-1} \frac{\Omega T}{2}$	$[bd, ad] = \text{impinvar}(b, a, F_s)$ Sau $[bd, ad] = \text{bilinear}(b, a, F_s)$

Exemple:

1. Să se proiecteze prin metoda invarianței răspunsului la impuls un filtru digital trece jos de tip Butterworth, știind că:

- la frecvența $F_e = 2\text{kHz}$ atenuarea este mai mică de 1 dB, adică $a_M = 1\text{dB}$;
- la frecvența $F_b = 3\text{kHz}$ atenuarea este mai mare de 20 dB, adică $a_m = 20\text{dB}$;
- frecvența de eșantionare este $F_s = 20\text{kHz}$.

2. Reluați problema precedentă folosind metoda transformatei biliniare.

Rezolvare 1. Se determină în primul rând frecvențele limită normate ale benzilor de trecere și oprire

$$\omega_e = 2\pi \frac{F_e}{F_s} = 0,2\pi \quad \text{și} \quad \omega_b = 2\pi \frac{F_b}{F_s} = 0,3\pi$$

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

Ținând cont de legătura dintre cele două axe de frecvență (vezi relația (5.18)) se calculează pentru filtrul analogic:

$$\Omega_e = \frac{\omega_e}{T_s} = \omega_e F_s = 4000\pi \text{ radiani/secundă}$$

$$\Omega_b = \frac{\omega_b}{T_s} = \omega_b F_s = 6000\pi \text{ radiani/secundă}$$

$F_s = 20000$; $F_e = 2000$; $F_b = 3000$;

$O_e = 2 \cdot \pi \cdot F_e$;

$O_b = 2 \cdot \pi \cdot F_b$;

Avem acum toți parametrii de intrare ai funcției `butterd` utilizată pentru determinarea ordinului filtrului analogic și a frecvenței sale de tăiere (vezi sintaxa):

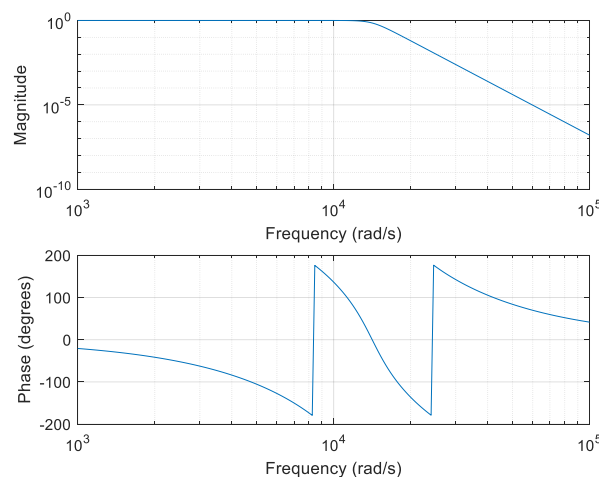
```
[n,Wt] = butterd(Oe,Ob,1,20,'s') → n = 8  
Wt= 1.4144e+004
```

// ordinul filtrului analogic este $n = 8$ iar frecvența sa de tăiere este egală cu 14144 radiani/secundă (se observă că această valoare aparține într-adevăr intervalului $[\Omega_e, \Omega_b]$).

Valorile n și Wt obținute reprezintă parametrii de intrare pentru funcția `butter` care va avea ca rezultat coeficienții funcției de transfer a filtrului analogic (vezi sintaxa și relația (5.23)):

```
[bs,as] = butter(n,Wt,'s')
```

Caracteristicile amplitudine-frecvență și fază-frecvență ale filtrului analogic se pot vizualiza folosind funcția `freqs` (asemănător cu `freqz`); vezi `help freqs`.
`figure(1), freqs(bs,as)`

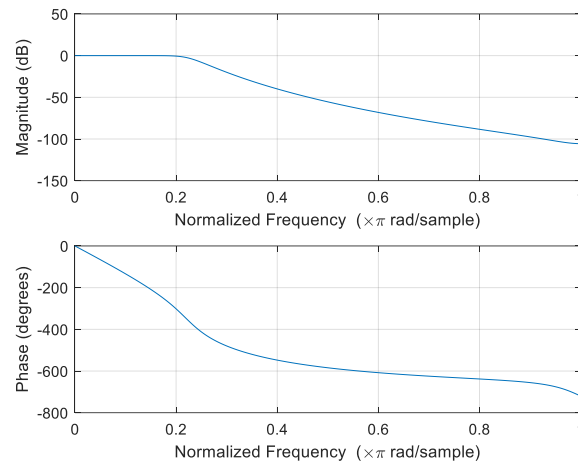


5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

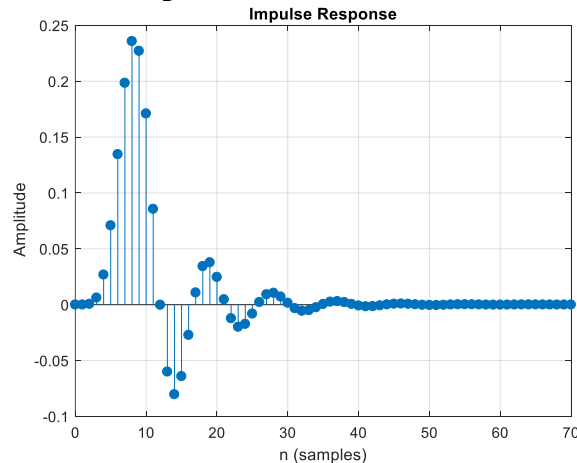
Acești doi vectori, `bs` și `as`, rezultați în urma comenzii precedente, vor servi drept argumente de intrare pentru funcția `impinvar` care va calcula valorile coeficienților funcției de transfer a filtrului digital dorit (vezi sintaxa și relațiile (5.23) și (5.24)):

```
[bd,ad]=impinvar(bs,as,Fs)
bd =
0.0000    0.0000    0.0006    0.0035    0.0045    0.0014    0.0001    0.0000
0
ad =
1.0000   -5.4793    9.2601  -11.3858    9.0379   -5.7181    1.5759   -0.3070
0.0266
```

Caracteristicile amplitudine-frecvență și fază-frecvență ale filtrului digital se pot vizualiza folosind funcția `freqz`:
`figure(2), freqz(bd,ad)`

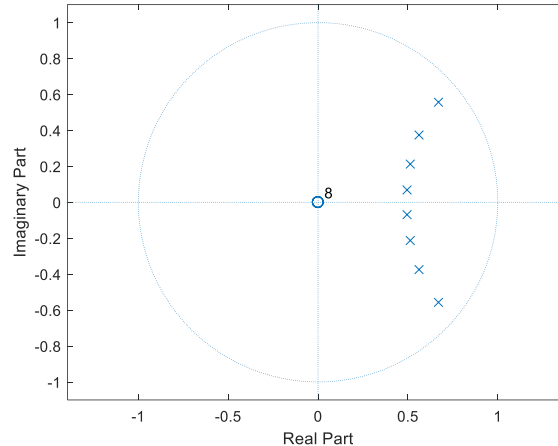


Funcția pondere a filtrului se poate vizualiza folosind comanda `impz`:
`figure(3), impz(bd,ad), grid`



5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

Pentru a verifica pe cale grafică stabilitatea filtrului digital obținut (toți polii trebuie să fie în interiorul cercului de rază unitate) putem folosi funcția `zplane`, vizualizând numai valorile polilor funcției de transfer:
`figure(4), zplane(1, ad)`



Rezolvare 2. Metoda transformatei biliniare presupune transformarea axei de frecvență conform relației (5.22):

$$\Omega_e = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega_e}{2} = 2F_s \tan \frac{\omega_e}{2}$$

$$\Omega_b = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega_b}{2} = 2F_s \tan \frac{\omega_b}{2}$$

Valorile pentru pulsațiile digitale ω_e și ω_b sunt:

$$\omega_e = 2\pi F_e / F_s;$$

$$\omega_b = 2\pi F_b / F_s;$$

$$\Omega_e = 2F_s \tan(\omega_e/2);$$

$$\Omega_b = 2F_s \tan(\omega_b/2);$$

Se vor urma aceiași pași ca în cazul metodei invarianței răspunsului la impuls, prezentată în problema precedentă:

$$[n, Wt] = \text{buttord}(\Omega_e, \Omega_b, 1, 20, 's')$$

$$[bs, as] = \text{butter}(n, Wt, 's')$$

$$[bd, ad] = \text{bilinear}(bs, as, F_s)$$

Se observă că ordinul filtrului va fi $n = 7$, deci mai mic cu o unitate decât la metoda invarianței răspunsului la impuls.

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

E2. *Exerciții:*

1. Să se proiecteze prin metoda transformatei biliniare un filtru digital trece sus de tip Butterworth, știind că:

- la frecvența $F_b = 2\text{kHz}$ atenuarea este mai mare de 40dB;
- la frecvența $F_e = 4\text{kHz}$ atenuarea este mai mică de 1dB;
- frecvența de eșantionare este $F_s = 24\text{kHz}$.

Să se reprezinte grafic:

- caracteristicile amplitudine-frecvență și fază-frecvență ale filtrului analogic și ale filtrului digital obținut;
- răspunsul la impuls al filtrului digital;
- poziționarea în planul Z a polilor funcției de transfer a filtrului digital;

Se poate realiza proiectarea și prin metoda invarianței răspunsului la impuls?

2. Reluați problema 1 în cazul unui filtru de tip Cebîșev I. Comentați diferențele obținute.

3. Reluați problema 1 în cazul unui filtru de tip Cebîșev II. Comentați diferențele obținute.

4. Reluați problema 1 în cazul unui filtru de tip eliptic. Comentați diferențele obținute.

5. Se consideră un filtru trece jos de tip Butterworth, de ordinul 3, având frecvența de tăiere $F_t = 4\text{kHz}$. Să se determine funcția de transfer $H(z)$ a filtrului digital obținut:

- a) prin metoda invarianței răspunsului la impuls;
- b) prin metoda transformării biliniare.

Se va considera frecvența de eșantionare $F_s = 40\text{kHz}$.

Să se reprezinte grafic:

- caracteristicile amplitudine-frecvență și fază-frecvență ale filtrului analogic și ale filtrului digital obținut;
- răspunsul la impuls al filtrului digital;
- poziționarea în planul Z a polilor funcției de transfer a filtrului digital;

6. Reluați problema 5 în cazul unui filtru de tip Cebîșev I cu o atenuare maximă în banda de trecere de 1dB. Comentați rezultatele obținute.

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

7. Reluați problema 5 în cazul unui filtru de tip Cebîșev II cu o atenuare minimă în banda de oprire de 40dB. Comentați rezultatele obținute.

8. Reluați problema 5 în cazul unui filtru de tip eliptic cu o atenuare minimă în banda de oprire de 40dB și o atenuare maximă în banda de trecere de 1dB. Comentați rezultatele obținute.

9. Să se proiecteze prin metoda invarianței răspunsului la impuls un filtru digital trece bandă de tip Butterworth, știind că:

- la frecvențele $F_{e1} = 4\text{kHz}$ și $F_{e2} = 6\text{kHz}$ atenuarea este mai mică de 1dB;
- la frecvențele $F_{b1} = 3\text{kHz}$ și $F_{b2} = 7\text{kHz}$ atenuarea este mai mare de 40dB;
- frecvența de eșantionare este $F_s = 20\text{kHz}$.

Să se reprezinte grafic:

- caracteristicile amplitudine-frecvență și fază-frecvență ale filtrului analogic și ale filtrului digital obținut;
- răspunsul la impuls al filtrului digital;
- poziționarea în planul Z a polilor funcției de transfer a filtrului digital;

Rezolvați problema folosind și metoda transformatei biliniare.

10. Reluați problema 9 în cazul unui filtru de tip Cebîșev I. Comentați diferențele obținute.

11. Reluați problema 9 în cazul unui filtru de tip Cebîșev II. Comentați diferențele obținute.

12. Reluați problema 9 în cazul unui filtru de tip eliptic. Comentați diferențele obținute.

13. Să se proiecteze prin metoda transformatei biliniare un filtru digital oprește bandă de tip Butterworth, știind că:

- la frecvențele $F_{e1} = 3\text{kHz}$ și $F_{e2} = 7\text{kHz}$ atenuarea este mai mică de 1dB;
- la frecvențele $F_{b1} = 4\text{kHz}$ și $F_{b2} = 6\text{kHz}$ atenuarea este mai mare de 40dB;
- frecvența de eșantionare este $F_s = 20\text{kHz}$.

Să se reprezinte grafic:

- caracteristicile amplitudine-frecvență și fază-frecvență ale filtrului analogic și ale filtrului digital obținut;
- răspunsul la impuls al filtrului digital;
- poziționarea în planul Z a polilor funcției de transfer a filtrului digital;

Se poate realiza proiectarea și prin metoda invarianței răspunsului la impuls?

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

14. Reluați problema 13 în cazul unui filtru de tip Cebîșev I. Comentați diferențele obținute.

15. Reluați problema 13 în cazul unui filtru de tip Cebîșev II. Comentați diferențele obținute.

16. Reluați problema 13 în cazul unui filtru de tip eliptic. Comentați diferențele obținute.

17. Să se proiecteze un filtru digital trece jos pornind de la un filtru analogic de tip Butterworth de ordinul 2 și frecvența de tăiere $F_t = 5\text{kHz}$. Frecvența de eșantionare este $F_s = 40\text{kHz}$. Se vor folosi:

- a) metoda invarianței răspunsului la impuls;
- b) metoda transformării biliniare.

Reluați problema pentru cazul unui filtru trece sus. Ce observați?

5.3. Proiectarea directă în Matlab a filtrelor *RII*

Funcțiile MATLAB `buttord`, `cheb1ord`, `cheb2ord` și `ellipord` prezentate în cadrul secțiunii precedente, permit determinarea ordinului minim și a frecvenței de tăiere a filtrelor digitale. În MATLAB, funcția de transfer a unui filtru digital *RII* de ordinul n este privită sub forma:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + \dots + b(n)z^{-(n-1)} + b(n+1)z^{-n}}{1 + a(2)z^{-1} + a(3)z^{-2} + \dots + a(n)z^{-(n-1)} + a(n+1)z^{-n}} \quad (5.26)$$

Sintaxa generală:

[n,Wn]=nume_functie(Wp,Ws,Rp,Rs)

- `nume_functie` poate fi oricare dintre funcțiile `buttord`, `cheb1ord`, `cheb2ord` și `ellipord`;
- `Rp` reprezintă dimensiunea riplului (exprimată în dB) din banda de trecere (atenuarea maximă din banda de trecere) iar `Rs` reprezintă dimensiunea riplului (exprimată în dB) din banda de oprire (atenuarea minimă din banda de oprire);

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

- W_p și W_s sunt frecvențele limită benzilor de trecere și de oprire; ele au valori cuprinse între 0 și 1, unde 1 corespunde jumătății frecvenței de eșantionare, calculul făcându-se astfel:

$$\text{Frecvența[Hz]} / (\text{Frecvența}_{\text{eșantionare}}[\text{Hz}]/2);$$

În cazul filtrelor trece bandă și oprește bandă W_p și W_s vor fi vectori cu două elemente;

- se vor returna:
 - 1) *ordinul minim* n al unui filtru digital de tipul corespunzător dat de `nume_functie`, ce satisface condițiile de gabarit impuse prin W_p , W_s , R_p , R_s ;
 - 2) *frecvența de tăiere* W_n (frecvența la 3 dB) a aceluiași filtru; în cazul filtrelor trece bandă și oprește bandă W_n va fi un vector cu două elemente deoarece aceste filtre prezintă două zone de tăiere.

De asemenea, funcțiile MATLAB `butter`, `cheby1`, `cheby2`, `ellip` permit proiectarea directă a filtrelor digitale RII (pe baza aproximării Cebîșev direct în domeniul digital). Sintaxele sunt asemănătoare cu cele prezentate pentru cazul filtrelor analogice cu deosebirea că dispăre parametrul de intrare 's' (care preciza că este vorba de un filtru analogic) iar frecvențele W_n au valori cuprinse între 0 și 1, unde 1 corespunde jumătății frecvenței de eșantionare, calculul făcându-se după regula anterioară:

$$\text{Frecvența[Hz]} / (\text{Frecvența}_{\text{eșantionare}}[\text{Hz}]/2).$$

Verificați sintaxele acestor funcții folosind comanda `help`.

Pașii care sunt urmați în proiectarea directă a filtrelor digitale RII sunt prezentați în tabelul 2.

Tabelul 2

Pas	Funcție Matlab utilizată
* aflare n și W_n	$[n, W_n] = \begin{cases} \text{buttord} \\ \text{cheb1ord} \\ \text{cheb2ord} \\ \text{ellipord} \end{cases} (W_p, W_s, R_p, R_s)$
* proiectare	$[bd, ad] = \begin{cases} \text{butter}(n, W_n) \\ \text{cheby1}(n, R_p, W_n) \\ \text{cheby2}(n, R_s, W_n) \\ \text{ellip}(n, R_p, R_s, W_n) \end{cases}$

5. FILTRE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

E3. *Exerciții:*

1. Rezolvați problemele 1-4 și 9-16 din cadrul exercițiilor **E2** prin proiectare directă cu ajutorul funcțiilor MATLAB prezentate.