Transformata Laplace folosind Matlab

1. Introducere în Transformata Laplace a semnalelor continue

La Semnale și sisteme 1 s-a folosit seria și transformata Fourier pentru a determina caracteristicile, în domeniul frecvență, pentru anumite tipuri de semnale continue în timp. Pentru ca un semnal să aibă serie și transformată Fourier trebuie să fie absolut integrabil. Astfel, o funcție de tipul $t \cdot \sigma(t)$ nu este absolut integrabil și, deci, nu se poate folosi transformata Fourier dar se poate aplica transformata Laplace. Astfel transformata Laplace poate fi considerată ca o generalizare a transformatei Fourier.

Transformata Laplace (numită și transformată Laplace bilaterală) pentru un semnal $x(t)$ este definită de relația:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt,$$

unde s este un număr complex. Iar, transformata Laplace unilaterală este definită de relația:

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt.$$

Astfel, având un semnal $x(t)$, mulțimea tuturor numerelor complexe s pentru care integrala există se numește Regiune de Convergență. De exemplu pentru funcție treaptă, $\sigma(t)$, regiunea de convergentă este dată de $Real(s) > 0$.

Ecuația folosită pentru a reconstrui semnalul $x(t)$, știind transformata acestuia Laplace, $X(s)$, este:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st}\, ds$$

Integrala este evaluate pentru $s = c + j\omega$ în planul complex între limitele $c + j\infty$ $și$ $c - j\infty$, unde c este un număr real pentru care s aparține regiunii de convergență a lui $X(s)$. Din punct de vedere practic, integrala este destul de dificil de rezolvat astfel că se folosesc metode algebrice, cum ar fi descompunerea în fracții simple, folosirea de perechi cunoscute $x(t) \underset{L}{\leftrightarrow} X(s)$ sau determinarea reziduurilor și polilor lui $X(s)$. O serie de perechi Laplace se pot găsi aici http://ece-research.unm.edu/bsanthan/ece541/table_ME.pdf

Ecuația pentru reziduri este data de ecuația următoare, pentru un semnal $x(t), cu\ x(t) = 0, pentru\ t < 0$:

$$x(t) = \sum_{\substack{\text{toți polii lui } X(s) \\ \text{din semiplanul stâng}}} Rez[X(s)e^{-st}]$$

Exemplul 1

Folosind scrierea simbolică, să se determine transformata Laplace pentru semnalul

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, t \geq 0 \\ 0, \hat{\imath}n\ rest \end{cases}$$

```
%% MATLAB
%% Calculul transformatei Laplace
syms x a t;
x = exp(-a*t);
X = laplace(x) %funcție care itereaza transformata Laplace pentru scrierea simbolica
```

Rezultatul obținut:

```
X =

1/(a + s)
```

Exercițiul 1

Folosind scrierea simbolică, să se determine transformata Laplace pentru semnalele

$$x_1(t) = \begin{cases} \cos(\omega t), t \geq 0 \\ 0, \hat{\imath}n\ rest \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \sin(\omega t), t \geq 0 \\ 0, \hat{\imath}n\ rest \end{cases}$$

$$x_3(t) = \begin{cases} \frac{t^4}{4!}, t \geq 0 \\ 0, \hat{\imath}n\ rest \end{cases}$$

Exemplul 2

Folosind scrierea simbolică, să se determine transformata Laplace inversă pentru semnalul

$$X(s) = \frac{s+2}{s^3 + 4s^2 + 3s}$$

```
%% MATLAB/Octave
%% Calculul transformatei Laplace inverse
syms X s x ; %simbolurile
X = (s+2)/(s^3+4*s^2+3*s); %transformata laplace
x = ilaplace(X) %transformata inversa
```

Rezultatul obținut:

```
x =

2/3 - exp(-3*t)/6 - exp(-t)/2
```

Exemplul 3

Determinați parametrii semnalului $x(t)$ știind că transformata laplace este

$$X(s) = \frac{s+2}{s^3 + 4s^2 + 3s}$$

```
%% Calculul transformatei Laplace folosind metode numerice
numaratorul = [1 2]; %coeficientii numaratorului
numitorul = [1 4 3 0]; %coeficientii numitorului
[r,p] = residue(numaratorul,numitorul); %calculul reziduurilor (r)
si polilor(p)
```

Rezultatul obținut:

```
r =

   -0.1667
   -0.5000
    0.6667


p =

    -3
    -1
     0
```

Folosind rezultatele obținute pentru r si p rezultă semnalul invers $x(t)$

$$x(t) = 0.66667 - 0{,}5 \cdot e^{-t} - 0{,}16667 \cdot e^{-3t}, t \geq 0$$

Exercițiul 2

Determinați parametrii semnalului $x(t)$ (simbolic și numeric) știind că transformata Laplace este:

$$X(s) = \frac{5s - 1}{s^3 - 3s - 2}$$

Exercițiul 3

A. Determinați transformata Laplace pentru următoarele semnale:

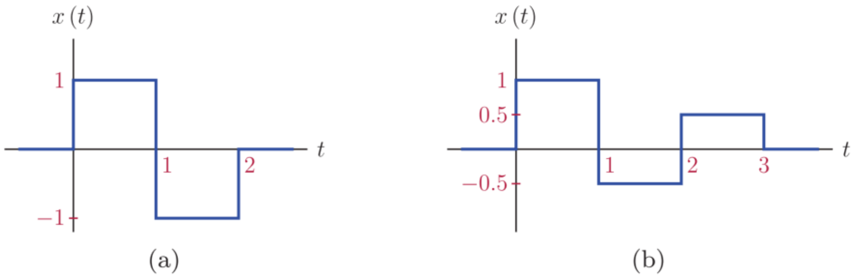
$$x_1(t) = \begin{cases} e^{-2t}, t \geq 0 \\ 0, \hat{\imath}n\ rest \end{cases}$$

$$x_2(t) = \delta\,(\mathrm{t} - 7)$$

$$x_3(t) = \sigma\,(\mathrm{t} - 7)$$

$$x_4(t) = \begin{cases} 1, 0 < t < 1 \\ -4, 1 < t < 2 \\ 0, \hat{\imath}n\ rest \end{cases}$$

B. Determinați transformata Laplace pentru semnale din figura de mai jos:



C. Determinați semnalul care are transformata Laplace data de următoarele expresii . Considerați semnalul ca fiind cauzal.

$$X_1(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s + 1}$$

$$X_2(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)(s + 3)}$$

Bibliografie

1. Mateescu, Adelaida, Dumitriu, N., Stanciu, L., **Semnale, circuite și sisteme**, Teora, București, 2001.
2. Răzvan Eusebiu Crăciunescu, Valentin Adrian Niţă, Radu Alexandru Badea, Semnale şi programare : de la teorie la aplicaţii folosind MATLAB/Octave, indrumar de laborator Editura Politehnica Press, Bucureşti 2022, ISBN (print) 978-606-9608-00-5